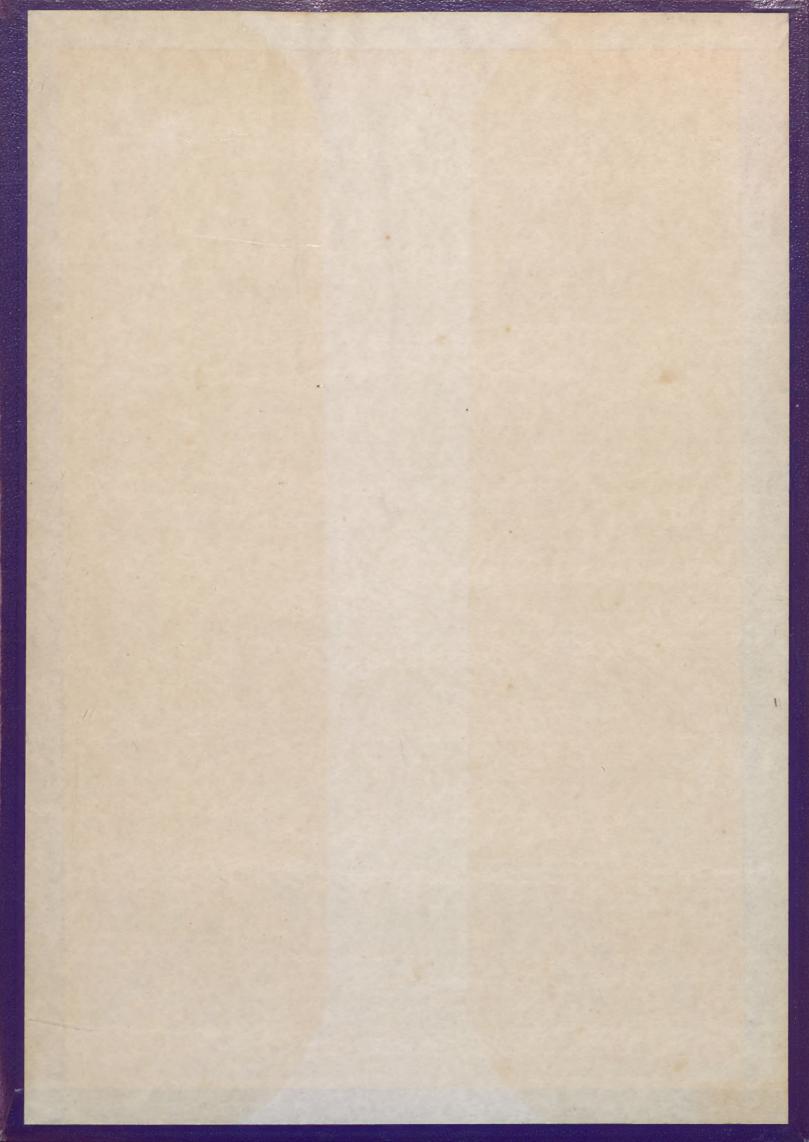


Láminas 26 al 38

ARQUIMEDIANOS

POLIEDROS REGULARES Y





ENUNCIADO

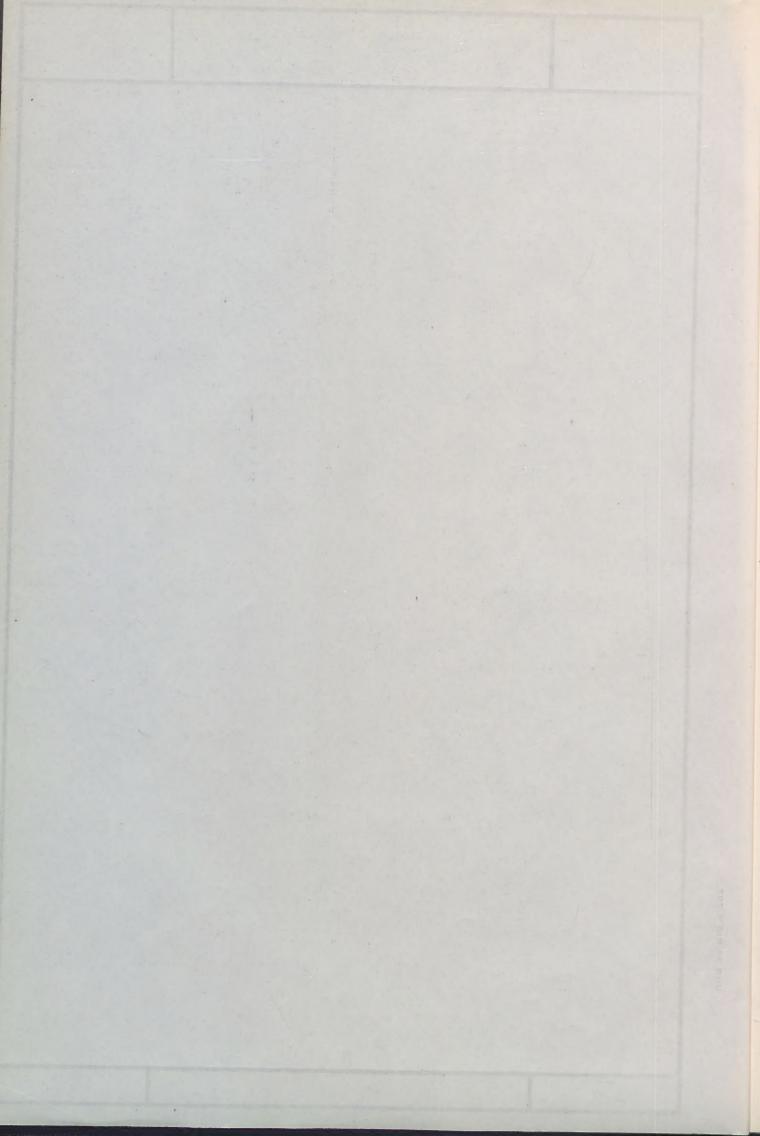
Representar por el metodo gráfico-analítico, en los planos I, II g II, el poliedro derivado de un exaedro regular, obterido al proyectar desde el curtro de la esfera circumscrita a este, g sobre ella, los centros de cada cara, uniendo a continua-ción estos puntos con los vértices del polígono de dicha cara.

bas coordenadas del centro de la esfera son:
0 (72, 72, 85) mm g el radio de la misma de
55 mm.

Dibujar en formato ASV g a escala 1:1.

DATOS 0 (72, 72, 85) mm $a_6 = 55$ mm

UNE A4 210 X 297



Al estudiar el ejercicio propuesto en la lamina 25, hemo obtenido unas deduciones previas de caracter general,
comunes a los cinco poliedros regulares.

Las formulas alli deducidas las aplicaremos sucesivamente a los cuatro poliedros que quedan por estudiar. El desarrollo del cálculo corcrespondiente a esta lámina, seguiva pues aquellas directrices, a las que haremos las oportumas referencias.

PROCESO GRÁFICO

En el easo del poliedro derivado del exaedro regular, el proceso gráfico es immediato, ya que sabernos que el conjugado del escaedro regular es el octaedro regular, y esta representación ha sido ya efectuada en el ejercicio de la lámina 23, enyo proceso mos permite:

- 1º Representar el exaedro regular dado, de vértices !
 al 8, inscrito en una es/era de 55 mm de radio.
- 2º Obtener los vértices del octaedro conjugado 9 al 14, inscrito en la misma esfera (estos vértices se han de corresponder con los 11 al 16 de la lámina 23).
- 3º Unir les vértices 9 al 14 con les courespondientes de cada cara del exaedre dade.

Al terminar la cepresentación del poliedos derivado, po-

(3)

of his investments, at wanter manhe water

Radio "Co" de la esfera inscrita en el mismo

Le deduce de la formula 13, lan. 2.

$$C_6 = \frac{1}{2} l_6 = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} a_6 = \frac{\sqrt{3}}{3} a_6$$

Radio "de la circumferencia circumscrita al poligono regular de una cara del mismo.

Le deduce de la formula 4, lan. 2

$$d_6 = \frac{\sqrt{2}}{2} l_6 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} a_6$$

Radio "ko" de la circumferencia inscrita al poligono requelas de una cara del mismo (apoterna).

Le deduce de la formula 16, lane. 2

$$k_6 = \frac{1}{2} l_6 = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} a_6 = \frac{\sqrt{3}}{3} a_6$$

Angulo rectilines "24° del diedos del mismo.

Le deduce de la forconnela 15, lans. 2

ren
$$\frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
 $2\frac{1}{6} = 90^{\circ}$

Esmands como base los valores anteriores, deduciremos los signientes del poliedro derivado.

Angulo rectilines "2 ×6" del diedro formado por dos ca-

ter to ame case the contract (applicant)

dro dado.

fe de duce de la formula general [4]: (ven lan. 25), sustituyends en ella los valores particulares de este caso.

 $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a_6 \cdot k_8}{(k_6)^2 - a_6 \cdot c_6 + (c_6)^2} = \frac{a_6 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot a_6}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot a_6\right)^2 - a_6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot a_6 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot a_6\right)^2} = 2\sqrt{3} + 3$

ly to do = lg (213+3) = lg 6,46 41 016. 0,81 05 08 2. - = to do

d6 = 81. 12' 21.7" 2 d6 = 162° 24' 43,4"

El valor de 46 < 90° ms demuestra la convexidad del poliedro derivado (ver lam. 25 " Consideraciones previas").

Altura "P" de una cara lateral de la piramide cecta forcomada en cada cara del exaedro dado (cara del polie-dro. dereivado).

Le deduce de la formula I5] (ver lain. 25) sustituyends en ella los valores particulares de este caso.

 $p = \sqrt{(a_6 - c_6)^2 + (k_6)^2} = \sqrt{(a_6 - \frac{\sqrt{3}}{3} a_6)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{3} a_6)^2} = \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{3}}{3}} a_6$

Desarrollo del calculo auterior: $p = \sqrt{(a_6 - \frac{\sqrt{3}}{3}a_6)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{3}a_6)^2} =$

 $=\sqrt{\left(a_{6}\right)^{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2}+\frac{3}{9}\left(a_{6}\right)^{2}}=\sqrt{\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^{2}+\frac{3}{9}}{4}}a_{6}=\sqrt{\frac{9+3-6\sqrt{3}}{9}+\frac{3}{9}}a_{6}=\sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}}a_{6}$

Otoja = " -

Arrista lateral "9" de la piramide recta regular, o lado ignal del trianguls isosceles de ma sera del priedro de-

Le deduce de la formula general [6] (ver lan. 25) sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$9 = \sqrt{(a_6 - c_6)^2 + (d_6)^2} = \sqrt{(a_6 - \frac{\sqrt{3}}{3} a_6)^2 + (\frac{\sqrt{6}}{3} a_6)^2} = \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{3}}{3}} a_6$$

Sesarrollo del calculo auterion:
$$q = \sqrt{\left(a_6 - \frac{\sqrt{3}}{3}a_6\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}a_6\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right)^2 + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{3}}{9}} q_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - \varepsilon\sqrt{$$

$$= \sqrt{\frac{13 - 6\sqrt{3}}{9}} \quad a_6 = \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{3}}{3}} \quad a_6$$

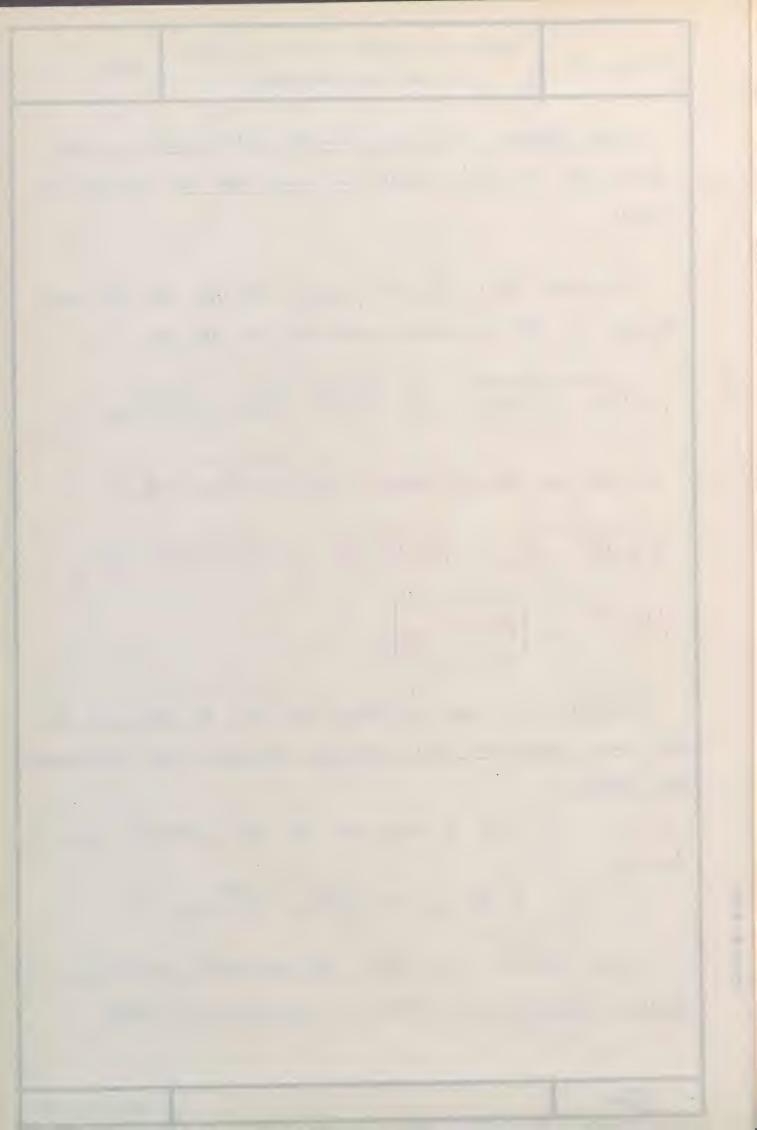
Diagonal 't" que se obtiene al mair la extremos de de lados consecutivos del poligono de una cara del exal-

Es la diagonal de un cuadrado, cuyo va-

lor recei

$$t = \sqrt{2} \quad \ell_c = \sqrt{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad a_c = \frac{2\sqrt{6}}{3} \quad a_c$$

terales contigues en las aristas de la piramide recta.



Le deduce de la formula queral [7] (ver la m. 15). sustituyendo en elle los valores particulares de este caso.

$$son \ \gamma_{6} = \frac{tq}{2 l_{6} p} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{3} a_{6} \times \sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}} a_{6}}{2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} a_{6} \times \sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}} a_{6}} = \sqrt{\frac{9+\sqrt{3}}{13}}$$

Desarrollo del calculo auterior: $5en \gamma = \frac{2\sqrt{5}}{3} a_6 \times \sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}} a_6$ $2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} a_6 \times \sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}} a_6$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} \times \sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}} \cdot \frac{5-2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{(6-2\sqrt{3})(5+2\sqrt{3})}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{30-10\sqrt{3}+12\sqrt{3}-12}{13}}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\times\frac{18+2\sqrt{3}}{13}}=\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{18+2\sqrt{3}}{13}}=\sqrt{\frac{9+\sqrt{3}}{13}}$$

nen
$$V_6 = \sqrt{\frac{9+\sqrt{3}}{13}} = 0,90 85 93 6...$$

lg. seu Y = 1, 958 36 97 Y = 65° 18' 42.2"



Pados 6, de la espera tampente a las asistes du priedro regular dado.

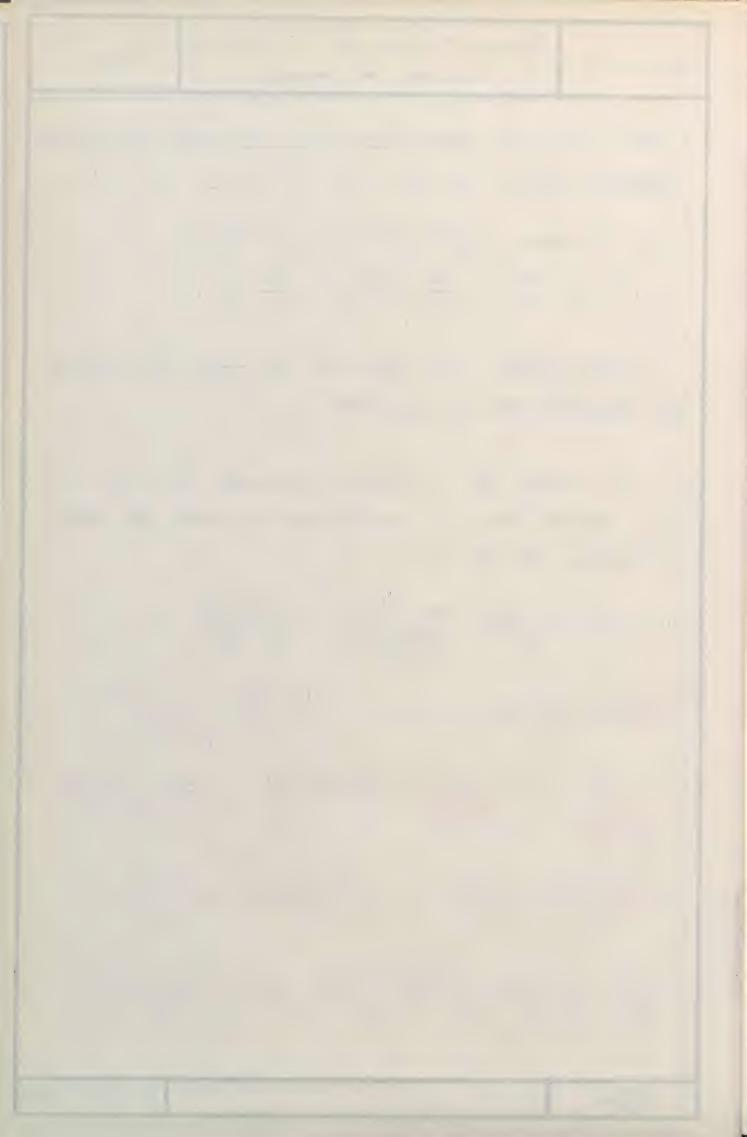
$$b_1 = b_6 = \frac{\sqrt{2}}{2} t_6 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} q_6 = \frac{\sqrt{6}}{2} q_6$$

Avents died o "F6" termado por una cara lateral de la piramide g su base.

Je deduce de la formula general [8] (ver condiciones previas, lam. 25) sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

new
$$\beta_{6} = \frac{a_{6} - C_{6}}{p} = \frac{a_{6} - \frac{\sqrt{3}}{3} a_{6}}{\sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}} a_{6}} = \sqrt{\frac{8-2\sqrt{3}}{3}}$$

Described del calculo anterio:
$$\frac{a_{6} - \frac{\sqrt{3}}{3} a_{6}}{\sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}}} = \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}}} = \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}}}$$



$$= \sqrt{\frac{(84 + 18 \sqrt{3})(5 - 2\sqrt{3})}{13^2 \times 3}} = \sqrt{\frac{6 \times (14 + 3\sqrt{3})(5 - 2\sqrt{3})}{13^2 \times 3}} = \sqrt{\frac{2 \times (70 - 28\sqrt{3} + 15\sqrt{3} - 18)}{13^2 \times 3}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times (52 - 13\sqrt{3})}{13^2}} = \sqrt{\frac{2 \times (4 - \sqrt{3})}{13}} = \sqrt{\frac{8 - 2\sqrt{3}}{13}}$$

El valor numérico de B6, experca, en quet. mesa. gesimales, es el signiente.

sen 30 = \ \ \frac{8-213}{13} = 0.59 06 90 5 \ \text{tg sen } \frac{9}{6} = 7,7713 600

Bc - 36° 12' 21,7"

debiculo verificare como comprobación (ver forem. [11], consideraciones previas, lanu. 25) que

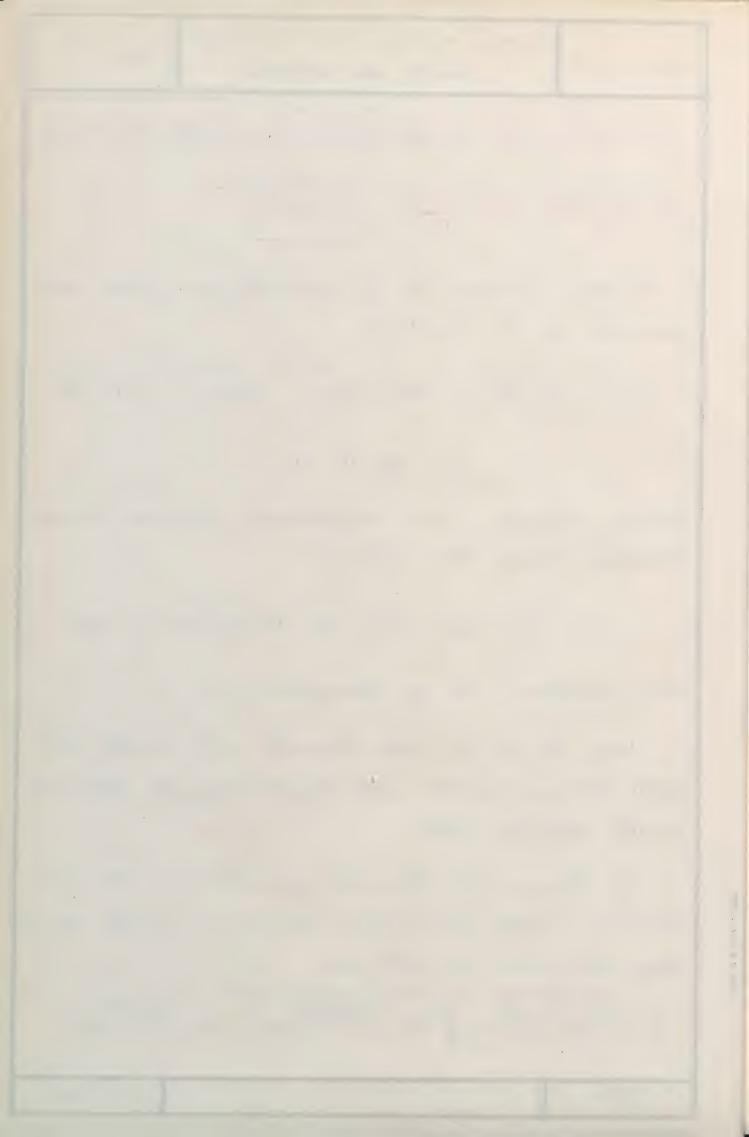
α₆ = Ψ₆ + β₆ = 15° + 26° 12' 21.7" 81° 12' 21,7"

valor coincidente al ya obtenido de «6.

Rodis "b2" de la esfera tangente a las aristas latenales de las piranaides cetas curas bases ana ence del exaedro regular dado.

Le deduce de la foramela general [9] (ver considiraciones previas, lam, 25), custituyendo en ella los valores particulares de este caso.

 $b_2 = \sqrt{(a_6)^2 - \frac{q^2}{4}} = \sqrt{(a_6)^2 - (\sqrt{\frac{6-2\sqrt{2}}{3}} a_6)^2} : 4 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}} a_6$



Jesarrollo del calculo auterior: $b_2 = \sqrt{(a_c)^2 - (\sqrt{6-3\sqrt{3}} a_c)^2}$: 4 =

$$=\sqrt{\left(a_{\rm E}\right)^2-\frac{6-213}{3}}:4\left(a_{\rm E}\right)^2=\sqrt{1-\frac{3-13}{6}}a_{\rm E}=\sqrt{\frac{6-3+13}{6}}a_{\rm E}=\sqrt{\frac{3-13}{6}}a_{\rm E}$$

Padio "C," de la espera inscrita en el polico o decivado

Je deduce de la formula general [10] (ver consideraciones previas, lam, 25), sustituyendo en ella los valores partien-

C, = b, cen & siendo b, = \frac{16}{3} ac 2 to \(\alpha = 213 + 3 \)

pero c:
$$\alpha_{6} = \frac{t_{5} \times 6}{\sqrt{1 + t_{5}^{2} \times 6}} = \frac{2\sqrt{3} + 3}{\sqrt{1 + (2\sqrt{3} + 3)^{2}}}$$
 de donde

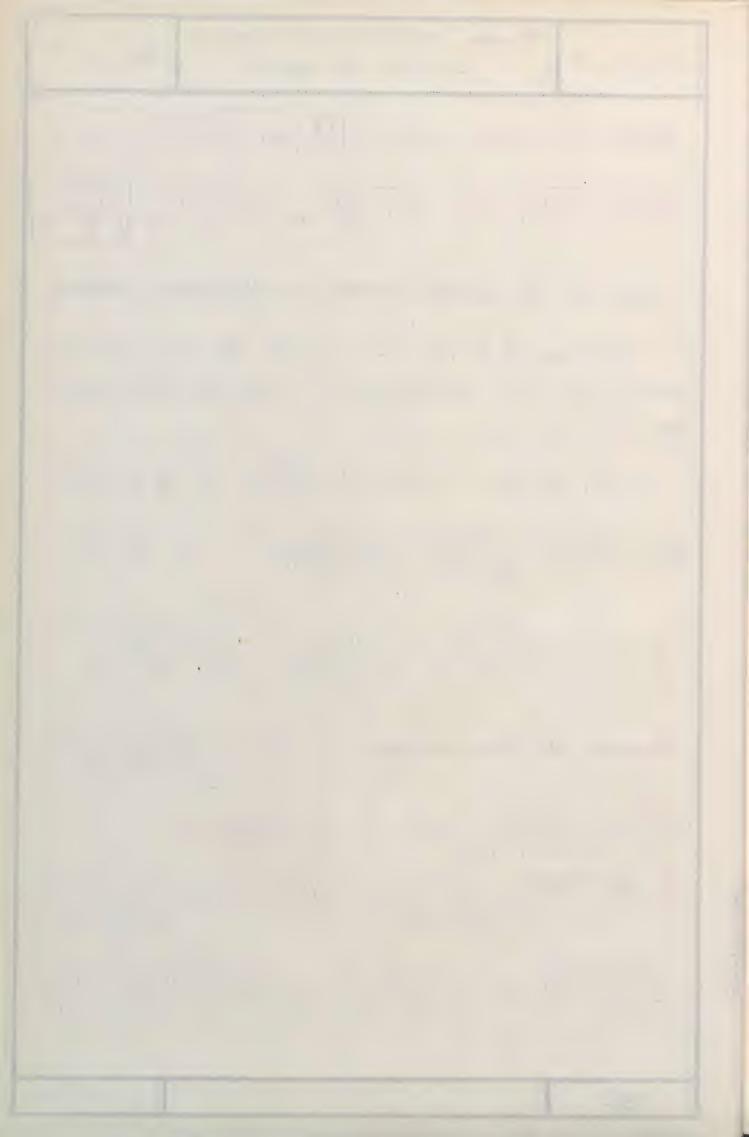
$$C_1 = b_1$$
 see $x_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} a_6 \times \frac{2\sqrt{3} + 3}{\sqrt{1 + (2\sqrt{5} + 3)^2}} = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{3}}{13}} a_6$

Desarrello del calcule auterion: $C_j = \frac{\sqrt{6}}{3} a_0 \times \frac{2\sqrt{3} + 3}{\sqrt{1 + (2\sqrt{3} + 3)^2}} =$

$$= \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{2\sqrt{3} + 3}{\sqrt{1 + 12 + 9 + 12\sqrt{3}}} \quad a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{2\sqrt{3} + 3}{\sqrt{2} \times (11 + 6\sqrt{3})} \quad a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{2\sqrt{3} + 3}{\sqrt{2} \times (11 + 6\sqrt{3})} \quad a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{2\sqrt{3} + 3}{\sqrt{2} \times (11 + 6\sqrt{3})} \quad a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{2\sqrt{3} + 3}{\sqrt{2} \times (11 + 6\sqrt{3})} \quad a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{2\sqrt{3} + 3}{\sqrt{2} \times (11 + 6\sqrt{3})} \quad a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{2\sqrt{3} + 3}{\sqrt{2} \times (11 + 6\sqrt{3})} \quad a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{2\sqrt{3} + 3}{\sqrt{2} \times (11 + 6\sqrt{3})} \quad a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{2\sqrt{3} + 3}{\sqrt{2} \times (11 + 6\sqrt{3})} \quad a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{2\sqrt{3} + 3}{\sqrt{2} \times (11 + 6\sqrt{3})} \quad a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{2\sqrt{3} + 3}{\sqrt{2} \times (11 + 6\sqrt{3})} \quad a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{2\sqrt{3} + 3}{\sqrt{2} \times (11 + 6\sqrt{3})} \quad a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{2\sqrt{3} + 3}{\sqrt{2} \times (11 + 6\sqrt{3})} \quad a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{2\sqrt{3} + 3}{\sqrt{2} \times (11 + 6\sqrt{3})} \quad a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{2\sqrt{3} + 3}{\sqrt{2} \times (11 + 6\sqrt{3})} \quad a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{2\sqrt{3} + 3}{\sqrt{2} \times (11 + 6\sqrt{3})} \quad a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} \times (11 + 6\sqrt{3})} \quad a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} \times (11 + 6\sqrt{3})} \quad a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} \times (11 + 6\sqrt{3})} \quad a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} \times (11 + 6\sqrt{3})} \quad a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} \times (11 + 6\sqrt{3})} \quad a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} \times (11 + 6\sqrt{3})} \quad a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} \times (11 + 6\sqrt{3})} \quad a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} \times (11 + 6\sqrt{3})} \quad a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} \times (11 + 6\sqrt{3})} \quad a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} \times (11 + 6\sqrt{3})} \quad a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} \times (11 + 6\sqrt{3})} \quad a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} \times (11 + 6\sqrt{3})} \quad a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} \times (11 + 6\sqrt{3})} \quad a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} \times (11 + 6\sqrt{3})} \quad a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} \times (11 + 6\sqrt{3})} \quad a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} \times (11 + 6\sqrt{3})} \quad a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} \times (11 + 6\sqrt{3})} \quad a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} \times (11 + 6\sqrt{3})} \quad a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} \times (11 + 6\sqrt{3})} \quad a_6 = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} \times (11 + 6\sqrt{3})} \quad a_6 = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6} \times (11 + 6\sqrt{$$

$$= \frac{\sqrt{6} \times \sqrt{2} \times (11 + 6\sqrt{3})}{3} \times \frac{2\sqrt{3} + 3}{2 \times (11 + 6\sqrt{3})} \alpha_{\epsilon} = \frac{\sqrt{12} (11 + 6\sqrt{3})}{3} \times \frac{(2\sqrt{3} + 3)(11 - 6\sqrt{3})}{2 \times (121 - 10\%)} \alpha_{\epsilon}$$

$$= \frac{\sqrt{12 (11+6\sqrt{3})}}{3} \times \frac{(2\sqrt{3}+3)(11-6\sqrt{3})}{2\times13} = \frac{\sqrt{12 (11+6\sqrt{3})(11-6\sqrt{3})^2}}{3} \times \frac{2\sqrt{3}+3}{2\times13} = \frac{\sqrt{12}(11+6\sqrt{3})(11-6\sqrt{3})^2}{3} \times \frac{\sqrt{12}(11+6$$



 $= \frac{\sqrt{3} \times (11 - 615) \times (121 - 108)}{3 \times 13} \times (2\sqrt{3} + 3)}{3 \times 13} = \frac{\sqrt{3} \times 13 \times (11 - 6\sqrt{5})(2\sqrt{3} + 3)^2}{3 \times 13}$

 $\frac{\sqrt{3 \times 13 \times (11 - 6\sqrt{3})(12 + 9 + 12\sqrt{3})}}{3 \times 13} a_6 = \frac{\sqrt{3 \times 13 \times (11 - 6\sqrt{3})(21 + 12\sqrt{3})}}{3 \times 13} a_6 = \frac{\sqrt{3 \times 13 \times (11 - 6\sqrt{3})(21 + 12\sqrt{3})}}{3 \times 13}$

 $= \frac{\sqrt{3} \times 3 \times (3 \times (11 - \varepsilon \sqrt{3})(7 + 4\sqrt{3})}{3 \times 13} \qquad \alpha_{\varepsilon} = \frac{\sqrt{13} \times (77 - 42\sqrt{3} + 44\sqrt{3} - 72)}{3} \qquad \alpha_{\varepsilon} = \frac{13}{3}$

 $= \frac{\sqrt{13 \times (5 + 2\sqrt{3})}}{\sqrt{3}} a_6 = \sqrt{\frac{13 \times (5 + 2\sqrt{3})}{\sqrt{3^2}}} a_6 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} a_6$

Este anismo valor re puede deducir de la formula equivalente [10'] (lam. 25), en la que

 $C_1 = b_2$ see $V_6 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}} a_6 \times \sqrt{\frac{9+\sqrt{3}}{13}} = \sqrt{\frac{(3+\sqrt{3})(9+\sqrt{3})}{6\times13}} a_6 =$

 $= \sqrt{\frac{27 + 9\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 3}{6 \times 13}} \quad a_6 = \sqrt{\frac{30 + 12\sqrt{3}}{6 \times 13}} \quad a_6 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{3}}{13}} \quad a_6$

Anca la leval "S" del poliedro derivado

Le obtiene como suma de las areas laterales de las seis sirámides rectas de las modrado, cuyas caras son trianqueles isoscoles de base "le" y altura "p", ya determinado.

(rique en loge 11)



Desarrollo del cálculo auterior: $S = 6 \times 4 \times \frac{213}{3} a_0 \times \sqrt{\frac{5-213}{3}} a_0$

$$= \frac{6 \times 4 \times 2}{3 \times 2} \sqrt{3} \sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}} \left(a_{0}^{2}\right)^{2} = 8 \sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}} \times \left(\sqrt{3}\right)^{2} a_{0}^{2} = 8 \sqrt{5-2\sqrt{3}} \left(a_{0}^{2}\right)^{2}$$

Nolumen "V" del poliedro derivado

Le obtiene como suma del volumen del exaccho dado y de las seis piramides de sus caras.

$$V = V_6 + 6 \times \frac{S_4 \times h}{3}$$

siendo " sh" el área de una cara del exaedro, y "h" la altrera de la piramide.

Para obtener V6 en funcion de a, ver lan. 2, form. 19 g 11, que mos dan

$$V_6 = (\ell_6)^3 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} a_6\right)^3 = \frac{8}{3\sqrt{3}} (a_6)^3 = \frac{8\sqrt{3}}{9} (a_6)^3$$

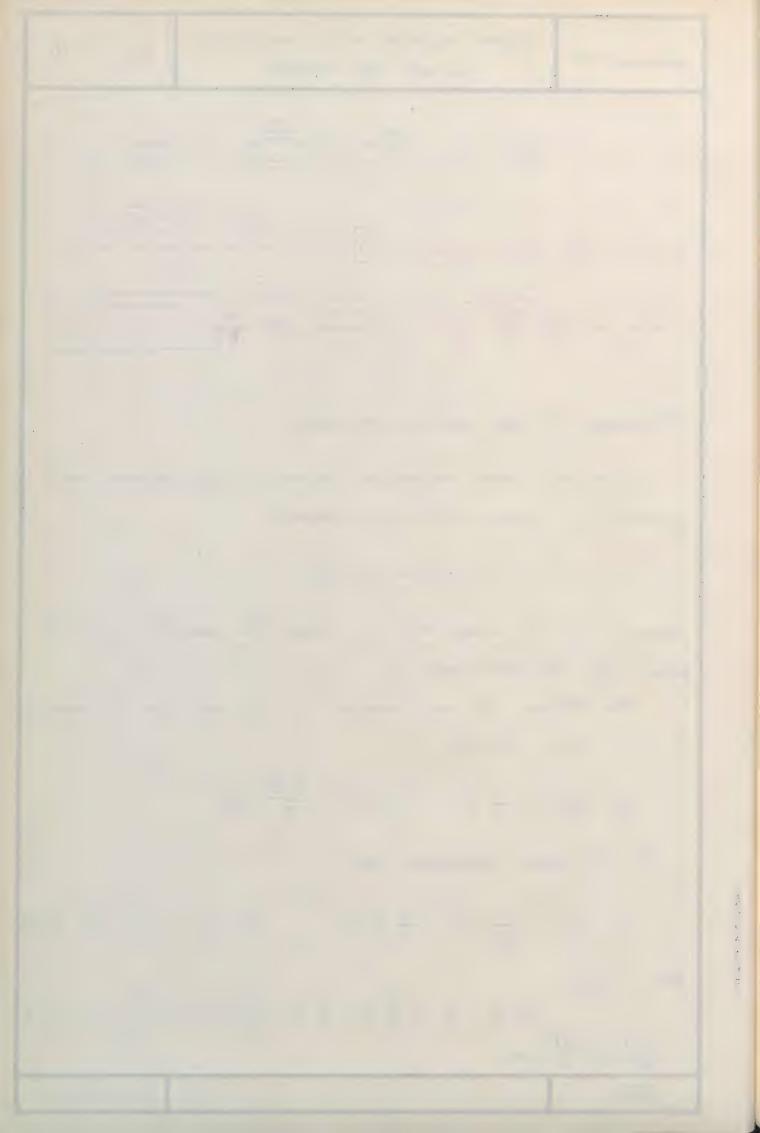
Por otra parte tendremos que

 $S_4 = |\ell_6|^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} a_6\right)^2 = \frac{4}{3} |a_6|^2$ y taminen sine (ver lam.2.

form. 11 g 13)

$$h = 9_6 - C_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} l_6 - \frac{1}{2} l_6 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \times l_6 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} a_6 = \frac{13 - 1}{2} \times \frac{3 - \sqrt{3}}{2} a_6 = \frac{13 - 1}{2} \times \frac{3 - \sqrt{3}}{2} a_6 = \frac{13 - 1}{2} \times \frac{3 - \sqrt{3}}{2} a_6 = \frac{13 - 1}{2} \times \frac{3 - \sqrt{3}}{2} a_6 = \frac{13 - 1}{2} \times \frac{3 - \sqrt{3}}{2} a_6 = \frac{13 - 1}{2} \times \frac{3 - \sqrt{3}}{2} a_6 = \frac{13 - 1}{2} \times \frac{3 - \sqrt{3}}{2} a_6 = \frac{13 - 1}{2} \times \frac{3 - \sqrt{3}}{2} a_6 = \frac{13 - 1}{2} \times \frac{3 - \sqrt{3}}{2} a_6 = \frac{13 - 1}{2} \times \frac{3 - \sqrt{3}}{2} a_6 = \frac{13 - 1}{2} \times \frac{3 - \sqrt{3}}{2} a_6 = \frac{13 - \sqrt{3}}{2} a_6 = \frac{13$$

 $= \frac{13 - 1}{\sqrt{3}} a_6 = \frac{3 - \sqrt{3}}{3} a_6$



of to account :

$$V = V_6 + 6 \times \frac{S_A + h}{3} = \frac{813}{9} (o_6)^3 + 6 \times \frac{\frac{4}{3} (a_6)^3 \times \frac{3 - \sqrt{3}}{3} a_6}{3} = \frac{8}{3} (a_6)^3$$

Desarrollo del calculo anterior:
$$V = \frac{9\sqrt{3}}{9} \left(a_6\right)^3 + 6 \times \frac{\frac{4}{3}\left|a_6\right|^2 \cdot \frac{3-\sqrt{3}}{3}}{3} a_6$$

$$= \left(\frac{8\sqrt{3}}{9} + \frac{6 \times 4 \times (3 - \sqrt{3})}{9 \times 3}\right) \left(a_6\right)^3 = \left(\frac{8\sqrt{3}}{9} + \frac{8(3 - \sqrt{3})}{9}\right) \left(a_6\right)^3 =$$

$$=\frac{8}{9}\left(\sqrt{3}+3-\sqrt{3}\right)\left(\ddot{a}_{6}\right)^{3}=\boxed{\frac{8}{3}\left(a_{6}\right)^{3}}$$



ou el enadro sinoptico que danos a continuación, rem-

CUADRO SINÓPTICO

N	V 1	
Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
258 6	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ a_6	1, 15 47 01 06
253 b ₁	$\frac{\sqrt{6}}{3}$ a_6	0, 81 64 97 06
254 bo	$\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}} \ O_6$	0, 88 80 74 96
255 C6	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ a_6	0, 57 73 50 a ₆
256 C1	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{3}}{13}} \ a_6$	0, 80 68 98 96
257 de	$\frac{\sqrt{6}}{3}$ a_6	0. 81 64 97 96
258 KG	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ a_6	0.57 73 50 a ₆
259	$sen \ Y_6 = \frac{\sqrt{2}}{2}$	sen $\psi_6 = 0.707107$ 2 \(\text{90}^\circ}
2€0 2 ≪6	Tg < = 2 \(\begin{align*} & 2 \lambda & \ & \ & \ & \ & \ & \ & \ & \ & \ &	$19 \approx_6 = 0.81 \text{ 05 08}$ $2 \approx_6 = 162^{\circ} 24' 43.4''$
2 Y ₆	sen $Y_6 = \sqrt{\frac{9 + \sqrt{3}}{13}}$	sen Y6 = 0,90 85 94 2 Y6 = 130° 37' 24.4"
162 B6	Sen $\beta_6 = \sqrt{\frac{8-213}{13}}$	sen $\beta_6 = 0.59$ 06 97 $\beta_6 = 36^{\circ}$ 12' 21.7"
263 P	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}} a_6$	0,71 55 1806
264 9	$\sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}} a_6$	0,91 94 02as
265 t	$\frac{2\sqrt{6}}{3}a_6$	1, 63 29 93 a ₆
sce 2	8 V5-2 V3 (a6)	9. 91 45 09(06)
267 V	$\frac{8}{3} \left(a_{\epsilon}\right)^{3}$	$2, 66 66 67 - (a_6)^3$



FIGURA CORPÓREA

forma de toronquelo issiscoles, de lue l_e = 63,5 mm

of alterna p = 39,4 mm.; en este terriquelo el rado iquel

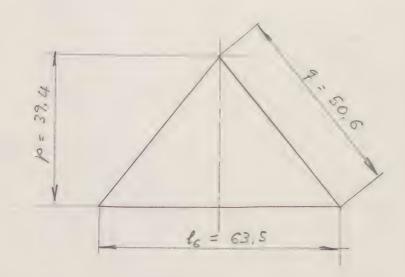
q, liene el Nator q = 50,6 mm (compessario).

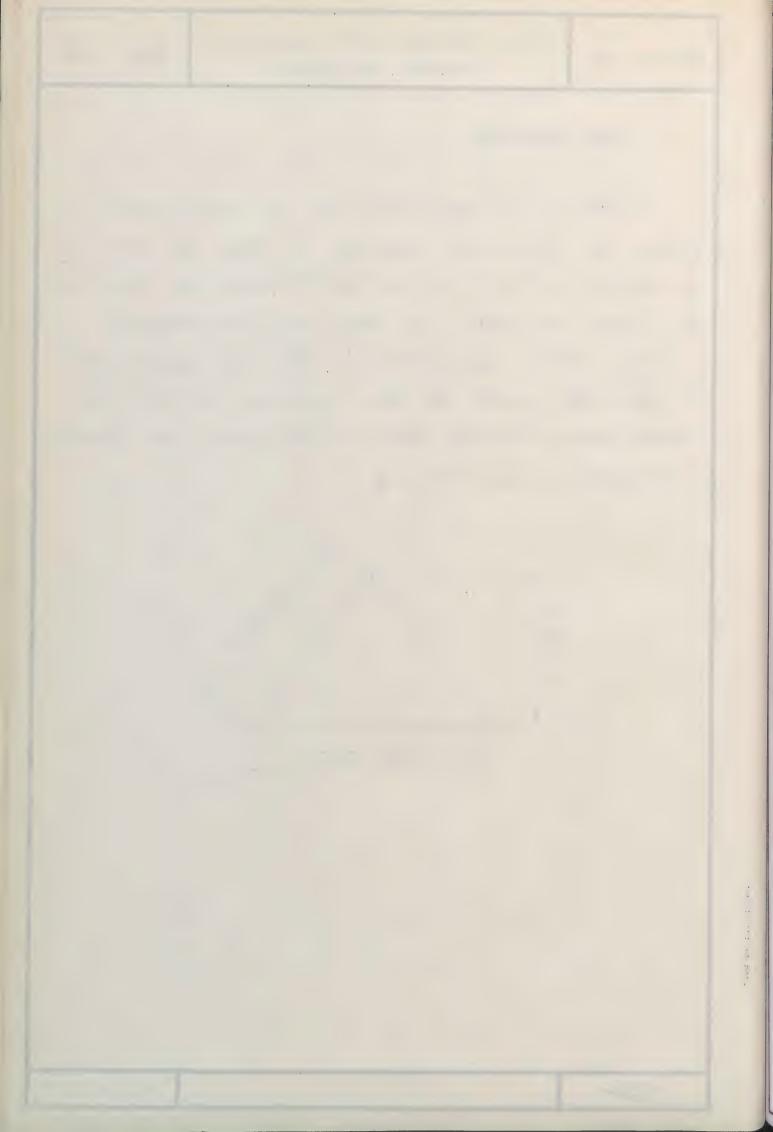
Fare obtene este por des se formarán previamente

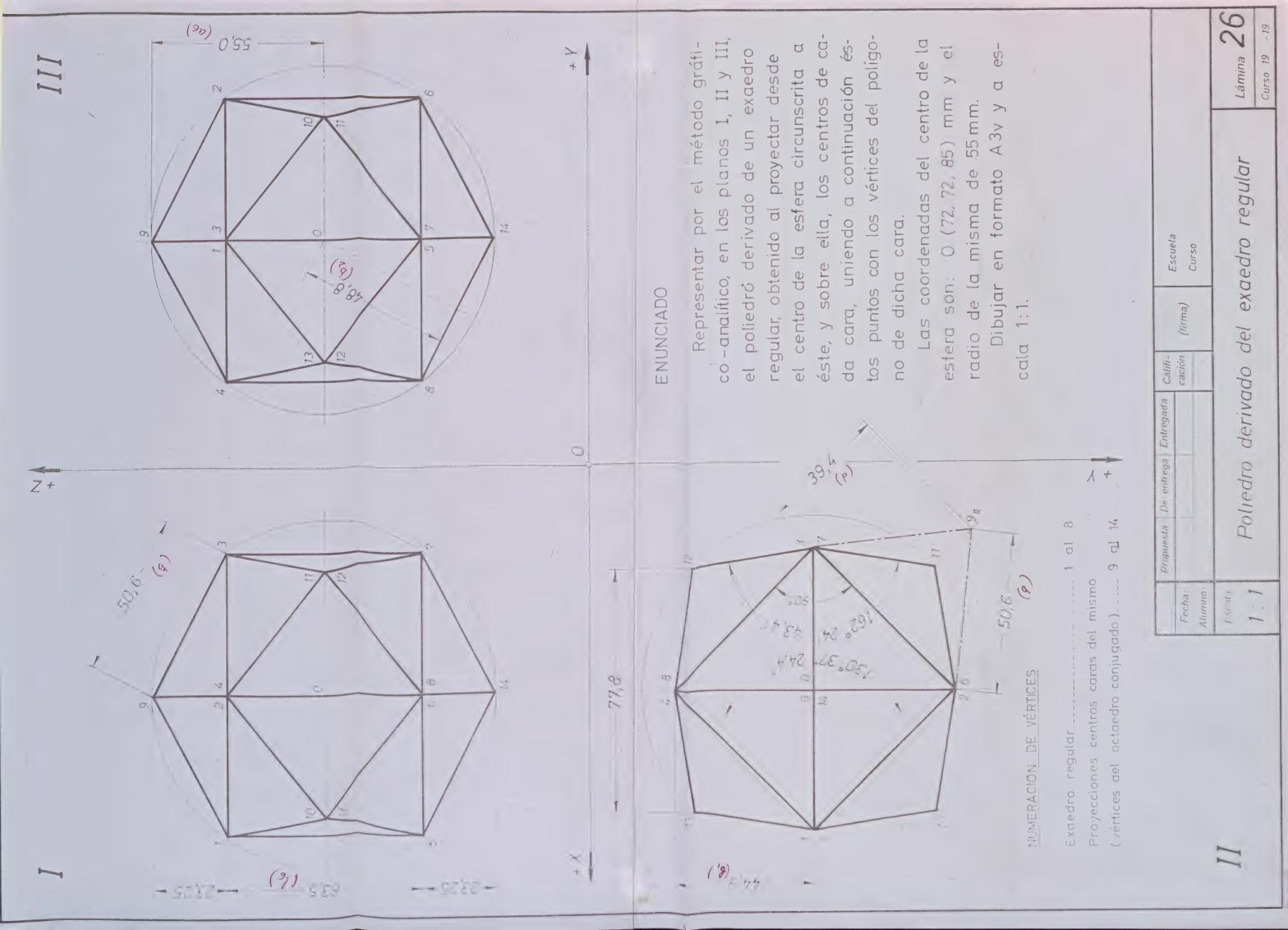
6 piramides aectes de base cuadrada de lado "lo",

cuyas caras laterales son 4 trianquelo, (ver figura)

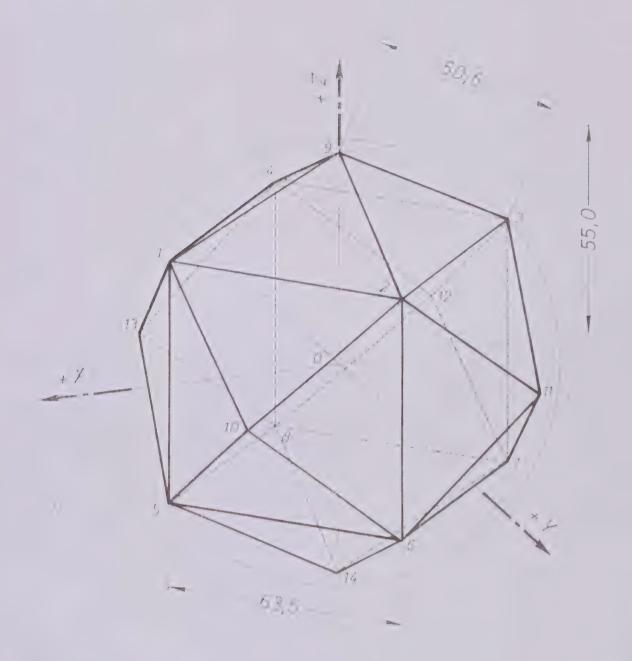
acoplados por en lado "q".













27

A) Por proyección de los centros de las caras.

ENUNCIALD

Flores I, II of II, el poliedro dercivado de un octaedro regular, obtenido al proyectar desde el centao de la esfera circumscrita a este, o aobre ella, lo
contres de cada cara, uniendo a continuación estos puntos con los restres del poligono de dicha
ses coordenadas del centro de la esfera son

O (72, 72, 85) mm o el radio de la entena, de
55 mm.

Dilujar en lesmat. A3V j a escala 1:1.

DA TOS 0 (72, 72, 85) mm $Q_8 = 55$ mm.



Al estudiar el ejercicio propuesto en la lamina 25, hemos obtenido unas deducciones previas de carácter semeral, comunes a los cinco poliedros regulares.

bas formulas alli deducidas las aplicaremos sucesevamente un ente caso particular del catacidos regular.
El desarrollo del calculo correspondiente a esta lámina, requitra pues aquellas directrices, a las que haremos las oportumas referencias.

PROCESO GRÁFICO

En el caso del poliedro derisado del octaedro regular.
el proceso gráfico es inmediats, ya que salemos que el
conjugado del octaedro requiar es el escaedro requilar y
esta representación ha sido ya escuada en el ejercicio
de la lámina 23, cuyo proceso mos permite:

1º Representar el octacolro regular dado, de vértices 9 al 14, inscrito en una esfera de 55 mm de radio (estos virlices se han de corresponder con los 11 al 16 de la lam, 23).

2º Minus la matices del exaction compagne 1 al 8, inscrito en la misma esfera.

3° Unir los vértices 1 al 8 con los correspondientes de cada cara del octaedos dads.

Al tecaminar la apresentación del polodes ourosos, po

CC



demi. Lever que est a un pludes concaro, de

$$C = 3 \times 8 = 24 \text{ cm}$$
. [ver lain. 25. féren. [1]; de $V = 6 + 8 = 14 \text{ préaliers}$ [ver lain. 15. féren. [2]); g de $A = 12 + 3 \times 8 = 36 \text{ aristes}$ [ver lain. 15. féren. [3])

ba demostración de la concaridad de este poliedro la haremos analíticamente.

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

Calculamos presionente los signicutes valores deducidos de ejercicios anteciones, en función del radio a₈ (dato) de la espera circumscrita al octardo cogular dado.

Minuro de caras "n" del octardo dado

n = 8

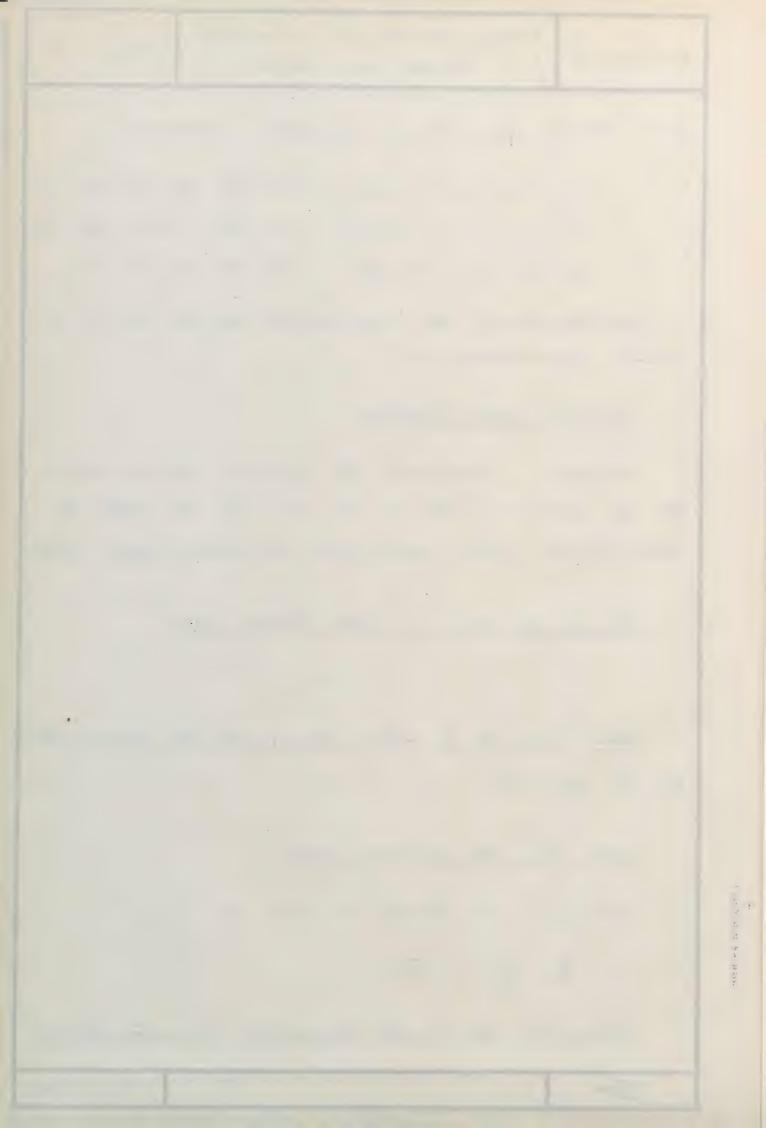
Radio "op" de la esfera circumscrita al prismo (dato del ejercicio).

bado "to" del octardo dado

le deduce de la forannela 21, lam. 3

$$\ell_8 = \frac{2}{\sqrt{2}} \quad a_8 = \sqrt{2} \quad a_8$$

Radio "b," de la créva taujente a las arestes del pe-



liedro agular dado.

de ceduce de la formula 22, da u. 3

$$b_1 = b_8 = \frac{1}{2} \ell_8 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \ a_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} a_8$$

Padis "(8" de la esfera inscria en el mismo

Le deduce de la formula 23, lam. 3.

$$c_8 = \frac{\sqrt{6}}{6} l_8 = \frac{\sqrt{6}}{6} \times \sqrt{2} a_8 = \frac{\sqrt{12}}{6} a_8 = \frac{\sqrt{3}}{3} a_8$$

Radio "de la circunferencia circunscrita al poligono regular de una cara del mismo.

Le deduce de la foranula 24, lam. 3

$$d_8 = \frac{\sqrt{3}}{3} l_8 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{2} a_8 = \frac{\sqrt{6}}{3} a_8$$

Padio "ko" de la circumferencia inscrita al poligono rugular de ma cara del mismo (apotema)

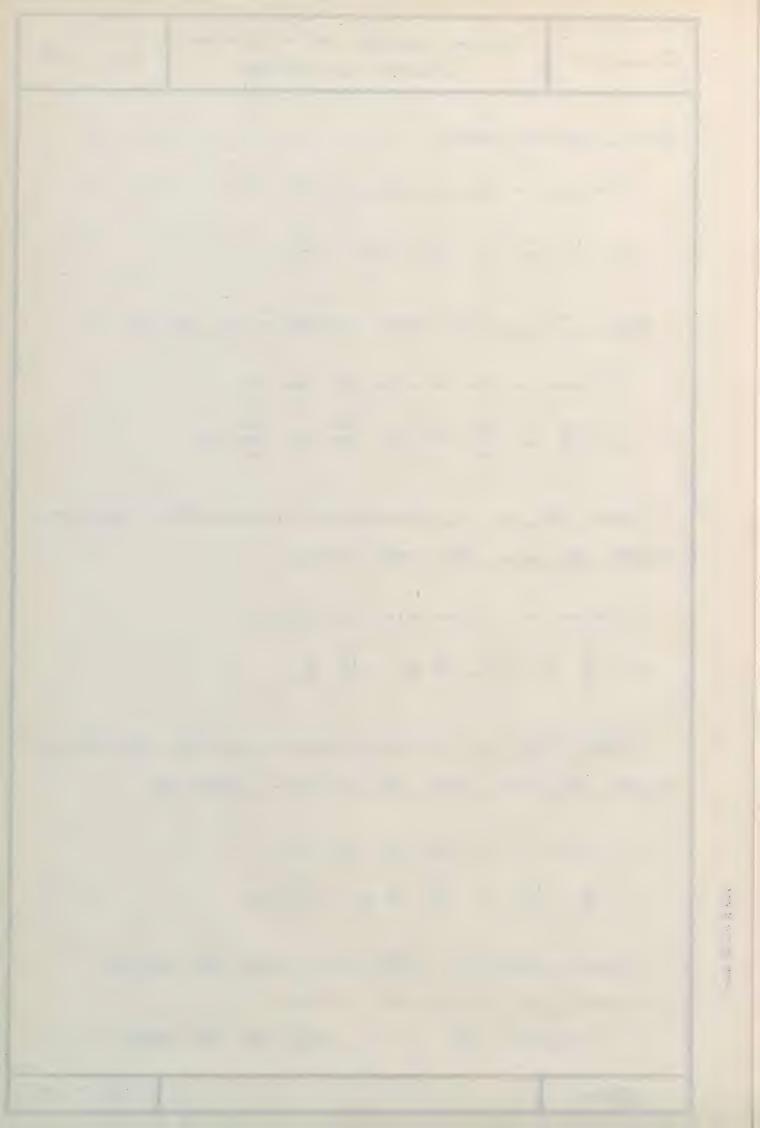
Le deduce de la formula 26, lans. 3.

$$k_8 = \frac{\sqrt{3}}{6} \ell_8 = \frac{\sqrt{3}}{6} \sqrt{2} a_8 = \frac{\sqrt{6}}{6} a_8$$

Angulo rectilines "2 98" del diedis del musuo

Le deduce de la formula 25, lan. 3

ren Pg =
$$\frac{\sqrt{6}}{3}$$



Comando como base los valores anteriores deducersuros los signientes del poliedro derivado.

Angulo rectilises "2 x " del diedro formado por dos a cas contiguas del poliedro derivado, en una arista del oc-

Le tetuce de la forminela general [4] (ver lan. 25), oustituyendo en ella lo valores particulares de este caso.

$$\frac{t_g}{(k_g)^2 - a_g c_g + (c_g)^2} = \frac{a_g \times \frac{\sqrt{6}}{6} a_g}{\left(\frac{\sqrt{6}}{6} a_g\right)^2 - a_g \times \frac{\sqrt{3}}{3} a_g + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} a_g\right)^2} = \frac{a_g \times \frac{\sqrt{6}}{6} a_g}{\left(\frac{\sqrt{6}}{6} a_g\right)^2 - a_g \times \frac{\sqrt{3}}{3} a_g + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} a_g\right)^2}$$

$$= - (\sqrt{6} + 2\sqrt{2})$$

Desarrolls del calculo anterior:
$$\left[\frac{1}{5} \times_{g}\right] = \frac{a_{y} \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} a_{x}}{\left(\frac{\sqrt{6}}{6} a_{y}\right)^{2} - a_{y} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} a_{y} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} a_{y}\right)^{2}}$$

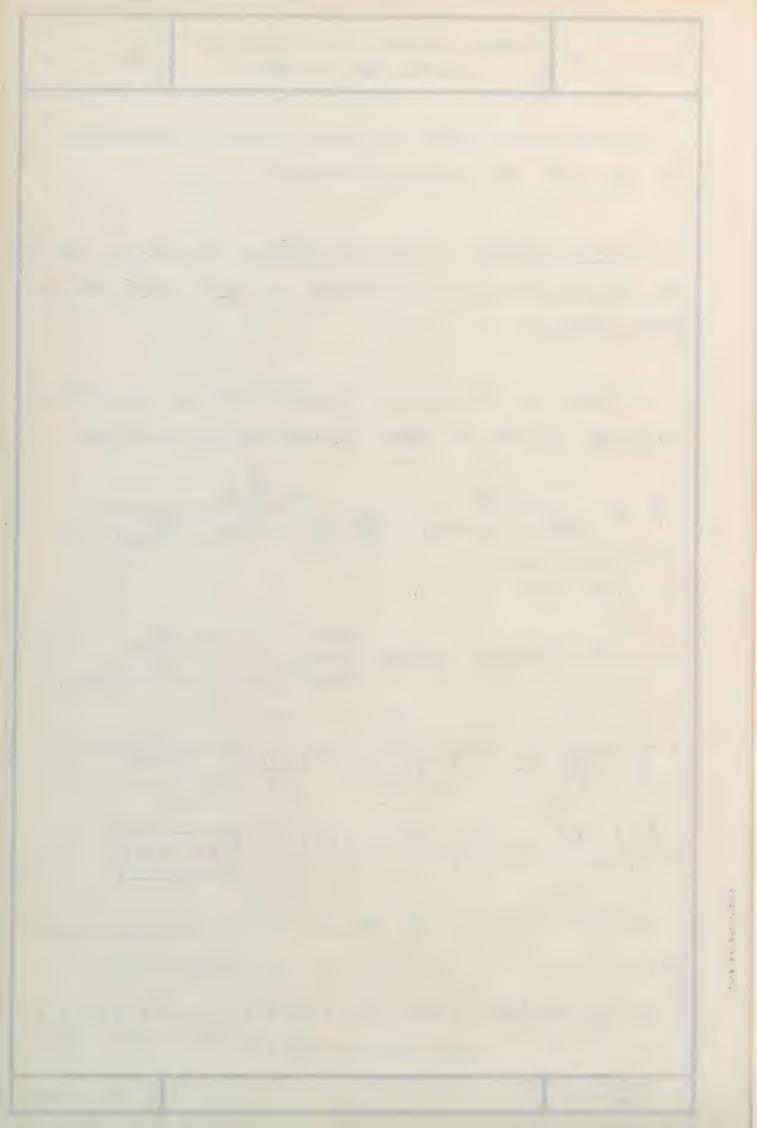
$$\frac{16}{6} \qquad \frac{\sqrt{6}}{6} \qquad \frac{\sqrt{6}}{6} \qquad \frac{\sqrt{6}}{6} \qquad \frac{\sqrt{6}}{3} \qquad \frac{\sqrt{6$$

$$= \frac{\sqrt{6}(3+2\sqrt{3})}{9-12} = \frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{18}}{3} = \frac{3\sqrt{6}+6\sqrt{2}}{3} = -(\sqrt{6}+2\sqrt{2})$$

sera:

$$t_{7} \propto_{g} = -(\sqrt{6} + 2\sqrt{2}) = -5, 27 79 16 9 \dots = \frac{1}{7}(\pi - \delta) = -\frac{1}{7}\delta$$

$$t_{7} = \delta = 5, 27 79 16 9$$



4 5 5 = lg. 5, 27 79 16 9. = 0, 7224 626 S= 79° 16' 17.7"

dg = 180° - 79° 16' 17,1" = 100° 43' 42,9" 7 2 dg = 201° 27' 25,8"

El valor de « > 90° mos demuestra la concavidad del poliedo des sudo ver lam. 35. "Considerciones previas").

Allura "P" de una rara lateral de la piramide me-Ta formada en cada cara del octardo dado (cara del poliedro derivado).

Le deduce de la formula general [5] (ver lam. 25), sustituyendo en ella les valerces particulares de este caso.

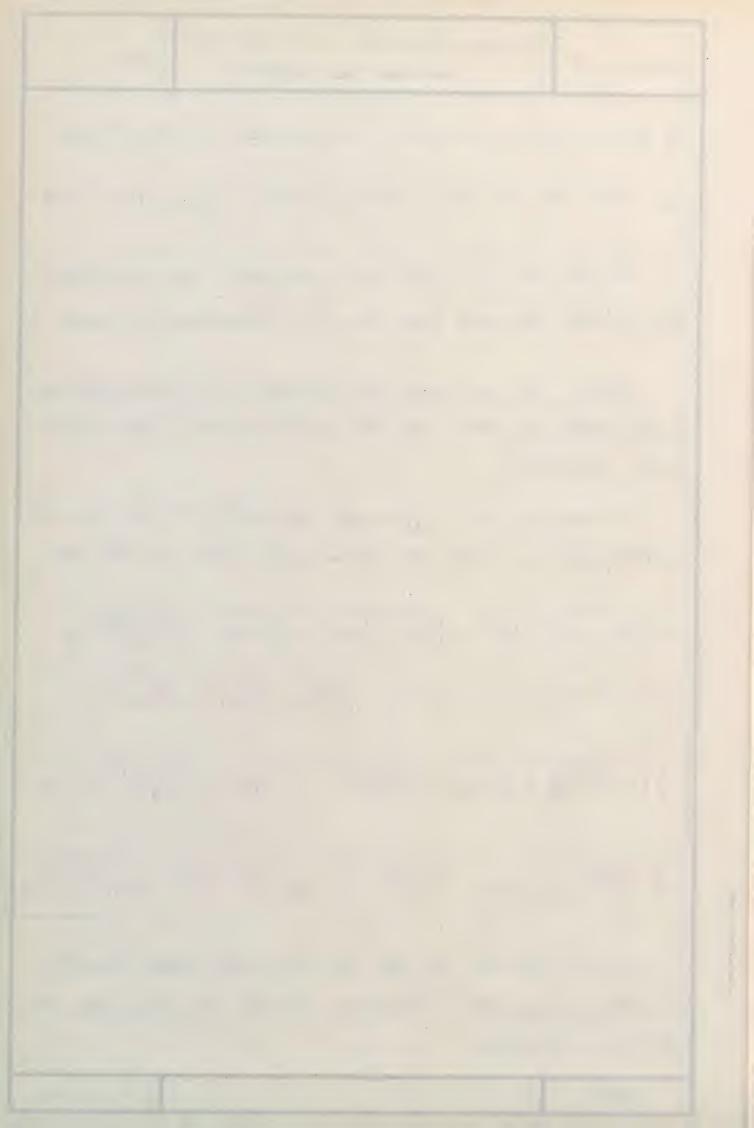
$$p = \sqrt{(a_8 - c_8)^2 + (k_8)^2} = \sqrt{(a_8 - \frac{\sqrt{3}}{3} a_8)^2 + (\frac{\sqrt{6}}{6} a_8)^2} = \sqrt{\frac{9 - 4\sqrt{3}}{6}} a_8$$

Desarrollo del carlente auterior: $[p] = \sqrt{(a_8 - \frac{\sqrt{3}}{3} a_8)^2 + (\frac{\sqrt{6}}{6} a_8)^2} =$

$$= \sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2} \left(q_{g}^{2}\right)^{2} + \frac{6}{36} \left(q_{g}^{2}\right)^{2}} + \sqrt{\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right)^{2} + \frac{1}{C}} \times q_{g} = \sqrt{\frac{9 + 3 - 6\sqrt{3}}{9} + \frac{1}{6}} \cdot q_{g} =$$

$$= \sqrt{\frac{12-6\sqrt{3}}{9} + \frac{1}{6}} \cdot a_8 = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{6}} \cdot a_8 = \sqrt{\frac{8-4\sqrt{3}+1}{6}} \cdot a_8 = \sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}} \cdot$$

l'aita lateral "9" de la piramide recta regular, o lado iqual del triangues insoccios de una cara del poliedos derivado.



UNE A4 210 X 297

Je deduce de la formula general [6] (ver lain. 25), sustitujendo en elle la valores justiculares de este caso.

$$9 = \sqrt{(a_8 - c_8)^2 + (d_8)^2} = \sqrt{(a_8 - \frac{\sqrt{3}}{3}a_8)^2 + (\frac{\sqrt{6}}{3}a_8)^2} = \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{3}}{3}} a_8$$

Desarrollo del calculo anterior:
$$\boxed{7} = \sqrt{\left(a_2 - \frac{\sqrt{3}}{3} a_8\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3} a_8\right)^2} =$$

$$=\sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\frac{6}{9}\cdot a_6}=\sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^2+\frac{6}{9}\cdot a_8}=\sqrt{\frac{9+3-6\sqrt{3}}{9}+\frac{6}{9}\cdot a_8}=$$

$$= \sqrt{\frac{18 - 6\sqrt{3}}{9}} \quad a_8 = \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{3}}{3}} \quad a_8$$

de des lades consecutives del policiones de una cara del octardo dado.

Es el tercer lado del trianquelo equilatero de la cara, por lo que

$$t = l_8 = \sqrt{2} \times a_8$$

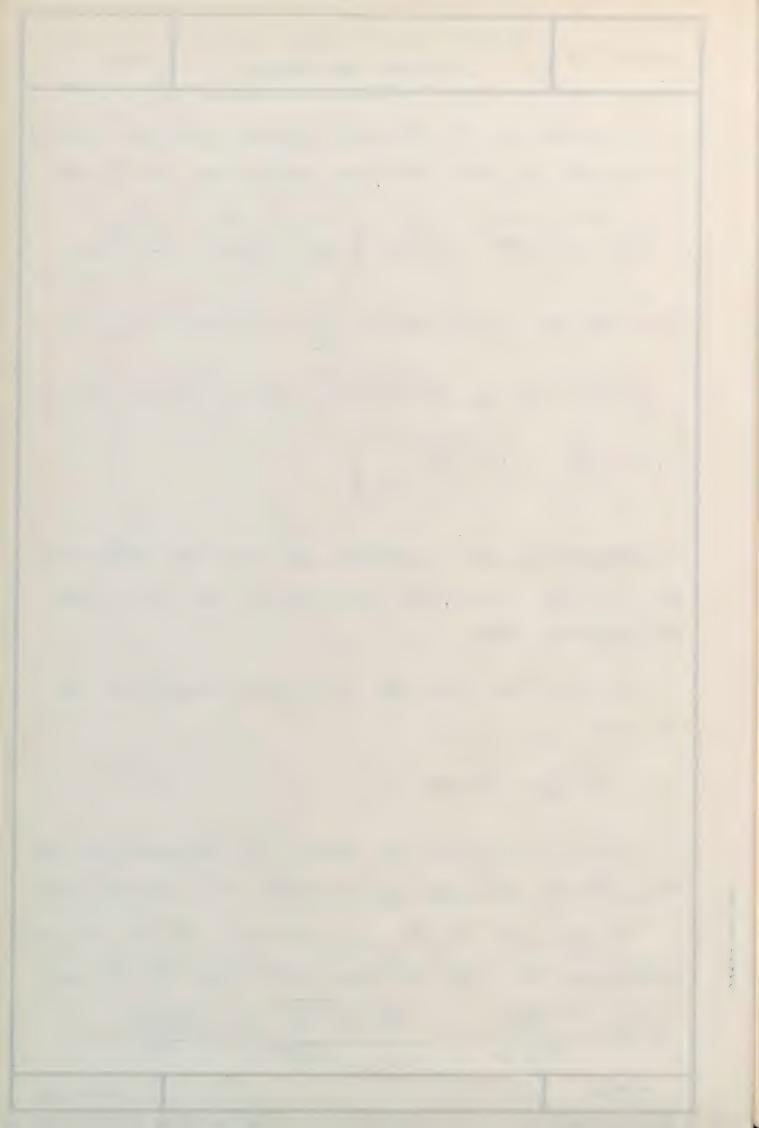
Angulo actilines del diedro "2 %" formado por dos caras laterales contiguas en las aristas de la priamide recta.

sustetujendo en alla los valous particulares de este caso.

sen
$$V_8 = \frac{tq}{2 l_8 p} = \frac{\sqrt{2} a_8 \sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}} a_8}{2 \times \sqrt{2} a_8 \times \sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}} a_8} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{3}}{11}}$$

(38)

7 - 7 - 72



$$= \frac{\sqrt{6-2\sqrt{3}}}{3} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}} : \frac{9-4\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2(6-2\sqrt{3})}{9-4\sqrt{3}}} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2(6-2\sqrt{3})(9+4\sqrt{3})}{81-48}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2(54-12\sqrt{3}+24\sqrt{3}-24)}{33}} =$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(30+6\sqrt{3})}{33}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(10+2\sqrt{3})}{11}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4(5+\sqrt{3})}{11}}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{3}}{11}}$$

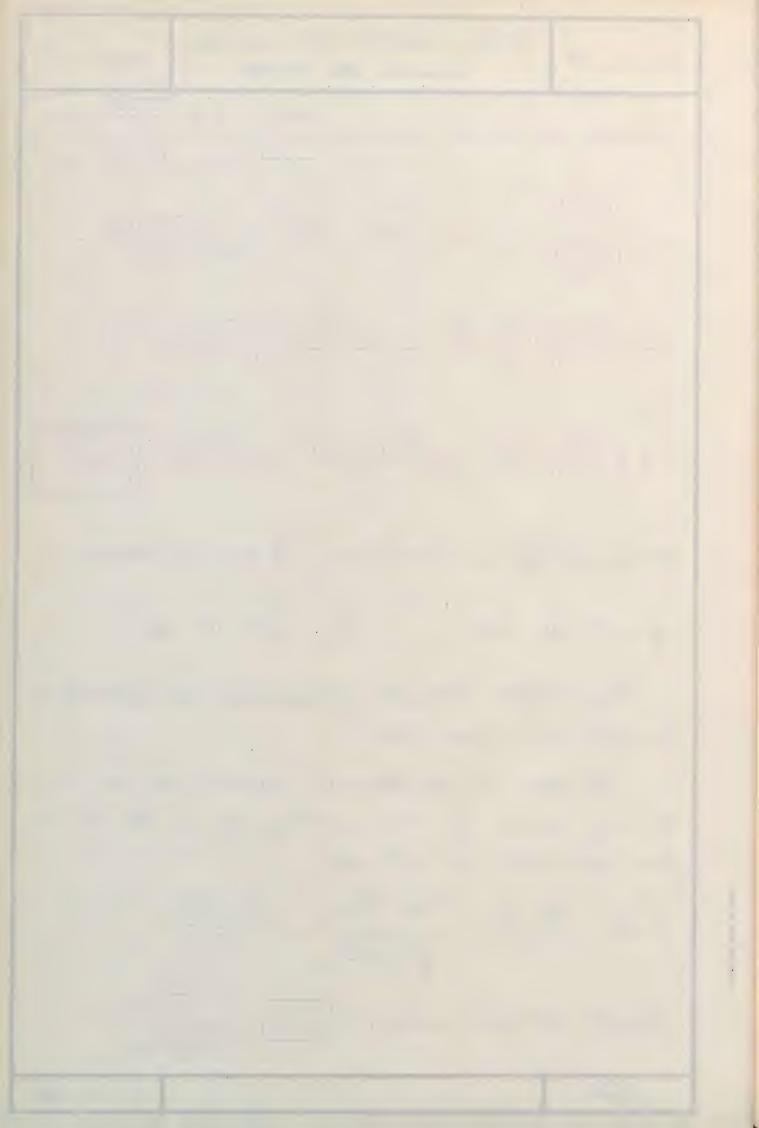
aeu
$$\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{5+\sqrt{3}}{11}} = 0.7823072$$
 lg aeu $\frac{7}{8} = \frac{7}{1}, 8933773$

Angulo diedo "B8" formado por una cara lateral de la piramide y su base

Le deduce de la formula general [8] (ver condiriones previas, lam. 25), sustituyendo en ella la Nalores particulares de este caso.

sen
$$\beta_8 = \frac{a_8 - c_2}{\beta} = \frac{a_8 - \frac{\sqrt{3}}{3} a_8}{\sqrt{\frac{9 - 4\sqrt{3}}{6}} a_8} = \sqrt{\frac{24 - 4\sqrt{3}}{33}}$$

Desarrollo del calculo anterer: [see
$$\beta_2$$
] = $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{q-4\sqrt{3}}{\epsilon}}} a_2$



$$= \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}}}{\sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}}} = \frac{\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{6}}}{\sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}}} = \left(\frac{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}{3} : \frac{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}}{6}\right) : \sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}} = \frac{\sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{3}}}{6} = \frac{\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{6}}}{\sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}}} = \frac{\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{6}}}{\sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}}}} = \frac{\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{6}}}{\sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}}} = \frac{$$

$$= \frac{6 \times (3 - \sqrt{3})}{3 \times (9 - 4\sqrt{3})} \times \sqrt{\frac{9 - 4\sqrt{3}}{6}} = \frac{2(3 - \sqrt{3})(9 + 4\sqrt{3})}{81 - 48} \times \sqrt{\frac{9 - 4\sqrt{3}}{6}} =$$

$$= \frac{2(27 - 9\sqrt{3} + 12\sqrt{3} - 12)}{33} \sqrt{\frac{9 - 4\sqrt{3}}{6}} = \frac{2 \cdot (15 + 3\sqrt{3})}{33} \sqrt{\frac{9 - 4\sqrt{3}}{6}}$$

$$=\frac{2(5+\sqrt{3})}{11}\sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}}=\frac{2}{11}\sqrt{\frac{(9-4\sqrt{3})(5+\sqrt{3})^2}{6}}=\frac{2}{11}\sqrt{\frac{(9-4\sqrt{3})(25+3+10\sqrt{3})}{6}}$$

$$=\frac{2}{11}\sqrt{\frac{(9-4\sqrt{3})(28+10\sqrt{3})}{6}}=\frac{2}{11}\sqrt{\frac{(9-4\sqrt{3})(14+5\sqrt{3})}{3}}=\frac{2}{11}\sqrt{\frac{126-56\sqrt{3}+45\sqrt{3}-60}{3}}$$

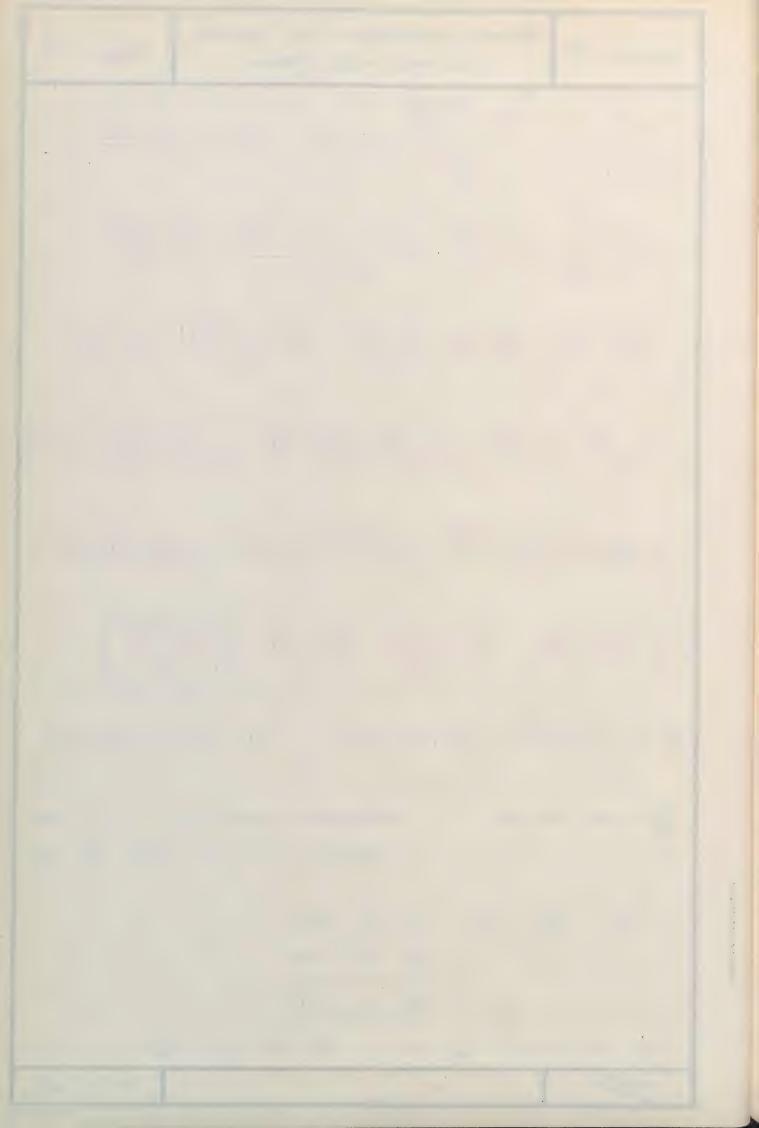
$$= \frac{2}{11} \sqrt{\frac{66 - 11\sqrt{3}}{3}} = 2 \sqrt{\frac{11(6 - \sqrt{3})}{3 \times 11^{2}}} = \sqrt{\frac{4(6 - \sqrt{3})}{33}} = \sqrt{\frac{24 - 4\sqrt{3}}{33}}$$

sen
$$\beta_g = \sqrt{\frac{24 - 4\sqrt{3}}{33}} = 0,7192546...$$
 lq neu $\beta_g = 7,8568827$

$$\alpha_g = \Psi_g + \beta_g = 54^{\circ} 44' 8.3''
+ 45^{\circ} 59' 34.6''$$

$$\alpha_g = 100^{\circ} 43' 42,9''$$

valor coincidente con el ga obtenido de do



Padis "bz" de la esfera tampente a la aniste latevales de las piramedes cectas cuyas bases son cara del octaedro regular dado.

de deduce de la formula general [9] (ver consideraciones previos, line. 25), on teterrendo en elle la malo.

$$b_2 = \sqrt{(a_8)^2 - \frac{9^2}{4}} = \sqrt{(a_8)^2 - (\sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}} a_8)^2} : 4 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}} a_8$$

Desarrollo del calculo anterior: $b_2 = \sqrt{(a_8)^2 - (\sqrt{6-213} a_8)^2}$: 4 =

$$=\sqrt{1-\frac{6-2\sqrt{3}}{3\times4}}-a_8=\sqrt{1-\frac{3-\sqrt{3}}{6}}a_8=\sqrt{\frac{6-3-\sqrt{3}}{6}}a_8=\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}a_8$$

Radio "Ci" de la enfera inscrita en el polie dro derivado:

Le deduce de la foranula general [10] (ver lam. 25) sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$c_1 = b_1$$
 sen x_8 : siends $b_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} a_8$ $\frac{1}{2} \frac{1}{4} x_8 = -(\sqrt{6} + 2\sqrt{2})$

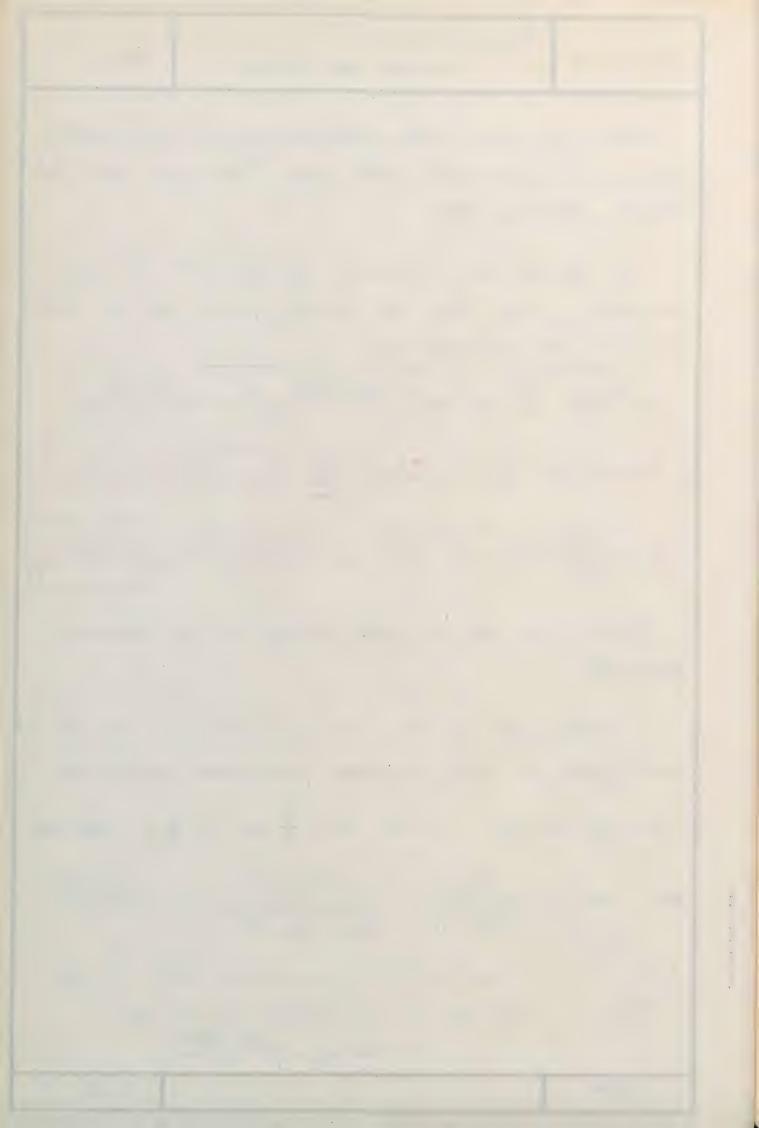
pero sen
$$\alpha_g = \frac{t_{\rm F} \alpha_g}{\sqrt{1 + t_{\rm F}^2 \alpha_g}} = \frac{-(\sqrt{6} + 2\sqrt{2})}{\sqrt{1 + (-(\sqrt{6} + 2\sqrt{2}))^2}} = -\sqrt{\frac{18 + 8\sqrt{3}}{33}}$$

pero estando $\frac{\pi}{8}$ comprendido entre $\frac{\pi}{2}$,

el sen $\frac{\pi}{8}$ será positivo, por lo que

Sen $\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{18 + 8\sqrt{3}}{33}}$

(3)



Desarrollo del calculo anterior: ren 4 = - (V6 + 2 V2)

$$|en = \frac{-(\sqrt{6} + 2\sqrt{2})}{\sqrt{1 + (-(\sqrt{6} + 2\sqrt{2}))^2}} = \frac{-(\sqrt{6} + 2\sqrt{2})}{\sqrt{1 + (-(\sqrt{6} + 2\sqrt{2}))^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{6 + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{1 + (\sqrt{6} + 2\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{6 + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{1 + 6 + 8 + 4\sqrt{12}}} = \frac{\sqrt{6 + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{15 + 8\sqrt{3}}}$$

$$= -\frac{(\sqrt{6} + 2\sqrt{2}) \times \sqrt{15 + 8\sqrt{3}}}{15 + 8\sqrt{3}} = -\frac{(\sqrt{6} + 2\sqrt{2})(15 - 8\sqrt{3})}{15^2 - 64 \times 3} \times \sqrt{15 + 8\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{15\sqrt{6} + 30\sqrt{2} - 8\sqrt{18} - 16\sqrt{6}}{33} \times \sqrt{15 + 2\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{2} - \sqrt{6}}{3} \times \sqrt{15 + 2\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{2} - \sqrt{6}}{3}$$

$$= -\frac{1}{33} - \sqrt{(15 + 8\sqrt{3})(6\sqrt{2} - \sqrt{6})^2} = -\frac{1}{33} \sqrt{(15 + 8\sqrt{3})(72 + 6 - 12\sqrt{12})} =$$

$$= -\frac{1}{33} \times \sqrt{(15 + 8\sqrt{3})(78 - 24\sqrt{3})} = -\frac{1}{33} \sqrt{6 \times (15 + 2\sqrt{3})(13 - 4\sqrt{3})} =$$

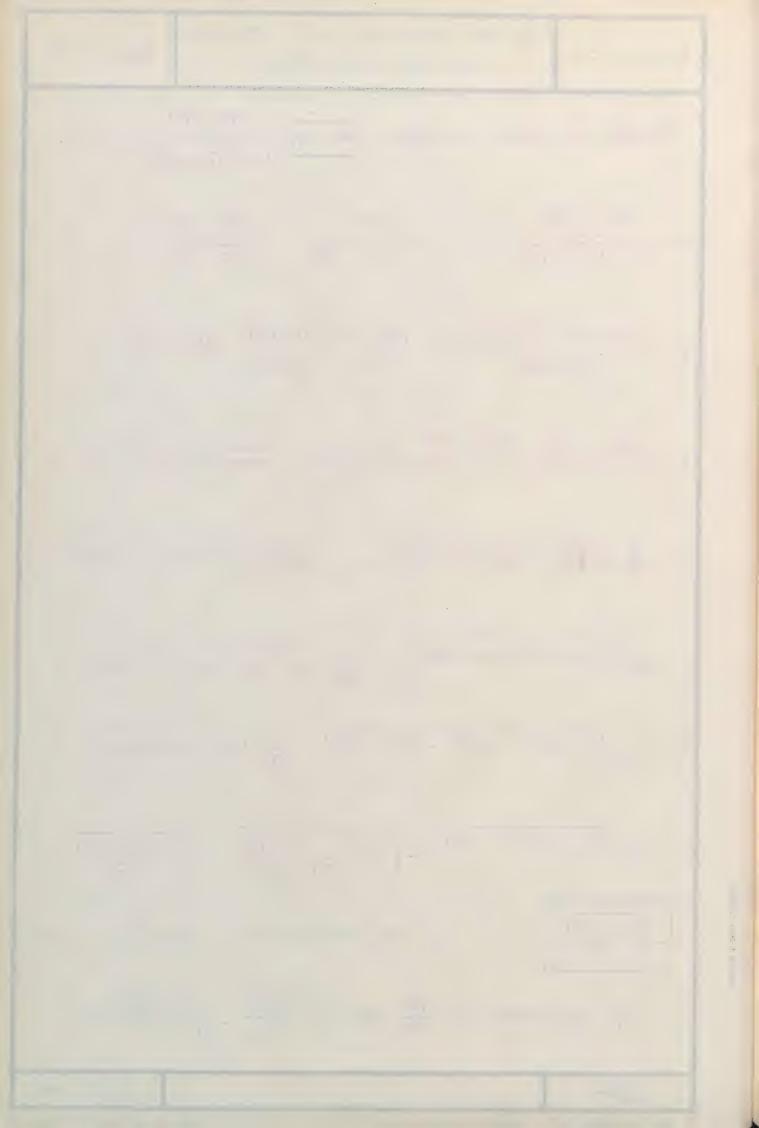
$$= -\frac{1}{33} \sqrt{6 \times (195 + 104 \sqrt{3} - 60 \sqrt{3} - 96)} = -\frac{1}{33} \sqrt{6 \times (99 + 24 \sqrt{3})} =$$

$$= -\frac{1}{33} \sqrt{6 \times 11 \times (9 + 4\sqrt{3})} = -\sqrt{\frac{6 \times 11 \cdot (9 + 4\sqrt{3})}{33 \times 33}} = -\sqrt{\frac{2 \times (9 + 4\sqrt{3})}{33}} =$$

$$=$$
 $-\sqrt{\frac{18+813}{33}}$

y por consigniente, tendremos pues

$$C_1 = b_1$$
 seu $\alpha_g = \frac{\sqrt{2}}{2} \times a_g \times \sqrt{\frac{18 + 8\sqrt{3}}{33}} = \sqrt{\frac{9 + 4\sqrt{3}}{33}} a_g$



Este mismo valor se puede déducir de la formula equivalente [10'] [lam. 25), en la que

$$C_1 = b_2$$
 and $V_8 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{5}} \ a_8 \sqrt{\frac{5+\sqrt{3}}{11}} = \sqrt{\frac{9+4\sqrt{3}}{33}} \ a_8$

Desarrollo del calculo anterior;
$$C_1 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}} \ a_2 \sqrt{\frac{5+\sqrt{3}}{11}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(3+\sqrt{3})(5+\sqrt{3})}{6\times11}} \quad a_8 = \sqrt{\frac{15+5\sqrt{3}+3\sqrt{3}+3}{6\times11}} \quad a_8 = \sqrt{\frac{18+2\sqrt{3}}{6\times11}} \quad a_$$

$$= \sqrt{\frac{9+4\sqrt{3}}{33}} \quad Cl_8$$

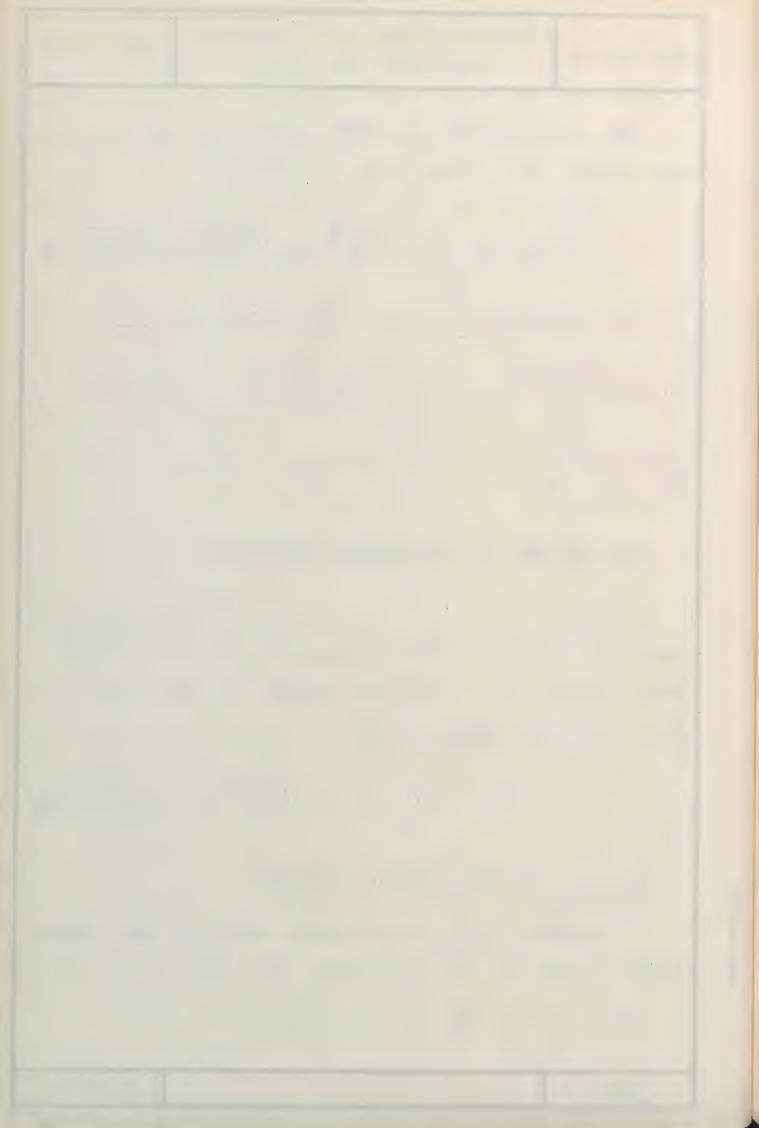
Anea lateral "5" del priedro decurado

Je obtiene como suma de las áreas laterales de las ocho piramides rectas de base trianquetar equilatera cuyas caras laterales son triangulas isósceles de base "la" y al-tura "p". "a determinados.

$$S = 8 \times 3 \times \frac{\ell_8 \times p}{2} = 12 \times \sqrt{2} \ a_8 \times \sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}} \ a_8 = 12 \sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{3}} \ (a_8)^2$$

Volumen "V" del poliedro derivado

Le obtiene como suma del Nolumen del octaedes dado y de las ocho piramides formadas en sus caras.



siendo "S3" el area de ma cara del octaedro, q "h" la altura de la piramide.

Para obtener 1/8 en funcion de az, ver lam. 3, forms. 28

$$V_g = \frac{\sqrt{2}}{3} (\ell_g)^3 = \frac{\sqrt{2}}{3} \times (\sqrt{2} a_g)^3 = \frac{4}{3} (a_g)^3$$

For the parte, tendremos que

$$S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\ell_8 \right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\sqrt{2} \ a_8 \right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(a_8 \right)^2$$

y tantien que (ver lam. 3. forms. 21 g 23)

$$h = a_8 - c_8 = a_8 - \frac{\sqrt{6}}{6} t_8 = a_8 - \frac{\sqrt{6}}{6} \times \sqrt{2} a_8 = \frac{\sqrt{12}}{6} a_8 = \frac{\sqrt{3}}{3} a_8$$

y finalmente

$$V = \sqrt{8} + 8 \times \frac{s_3 \times h}{3} = \frac{4}{3} (a_8)^3 + \frac{8}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} (a_8)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} a_8 = \frac{8}{3} (a_8)^3$$

Desarrollo del calculo auterior: $V = \frac{4}{3} (a_8)^3 + \frac{8}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} (a_8)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} a_8$

$$= \left(\frac{4}{3} + \frac{8}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}\right) (a_8)^3 = \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\right) (a_8)^3 = \frac{8}{3} (a_8)^3$$

Cuyo resultado mos demenestra que "El volumen del policido deservado del octacido regular es el dete del volumen de este"



cesuminuos los anniches que como a un Emacion

CUADRO SINOPTICO

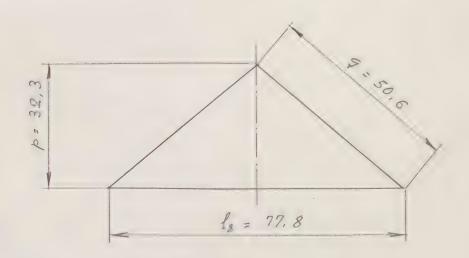
Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
268 18	.V2 08	1, 41 42 14 98
269 b1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ a_8	0, 70 71 07 a ₈
270 62	V3+V3 98	0, 88 80 74 98
271 C8	V3 a8	0, 57 73 50 ag
Ca	$\sqrt{\frac{9+4\sqrt{3}}{33}} a_{8}$	0, 69 47 47 08
de	V6 3 08	0, 81 64 97 de
ko	<u>V6</u> 98	0, 40 82 48 a ₈
248	sen $\varphi_8 = \frac{\sqrt{6}}{3}$	sen 4 ₈ = 0.81 64 97 24 ₈ = 109° 28' 16.6"
200	tg 20% = - (V6+2 V2)	$f_{3} \approx_{8} = -5.277917$ $2 \approx_{8} = 201^{\circ} 27' 25.8''$
2 /8	sen $Y_8 = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{3}}{11}}$	sen Yg = 0.78 23 07 2 Yg = 102° 56′ 40,6″
Be	sen Be=\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\	$sen \beta_8 = 0.77 92 55$ $\beta_8 = 45^{\circ} 59' 34,6"$
P	$\sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}} q_8$	0,58 76 22 a ₈
9	$\sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}} a_8$	0, 91 94 02 a ₈
t	$\sqrt{2}$ a_8	1, 41 42 14 ag
5	$12\sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{3}}(a_8)^2$	9, 97 22 74. (0)
V	8/3 (as)3	2, 66 66 67 (02)3

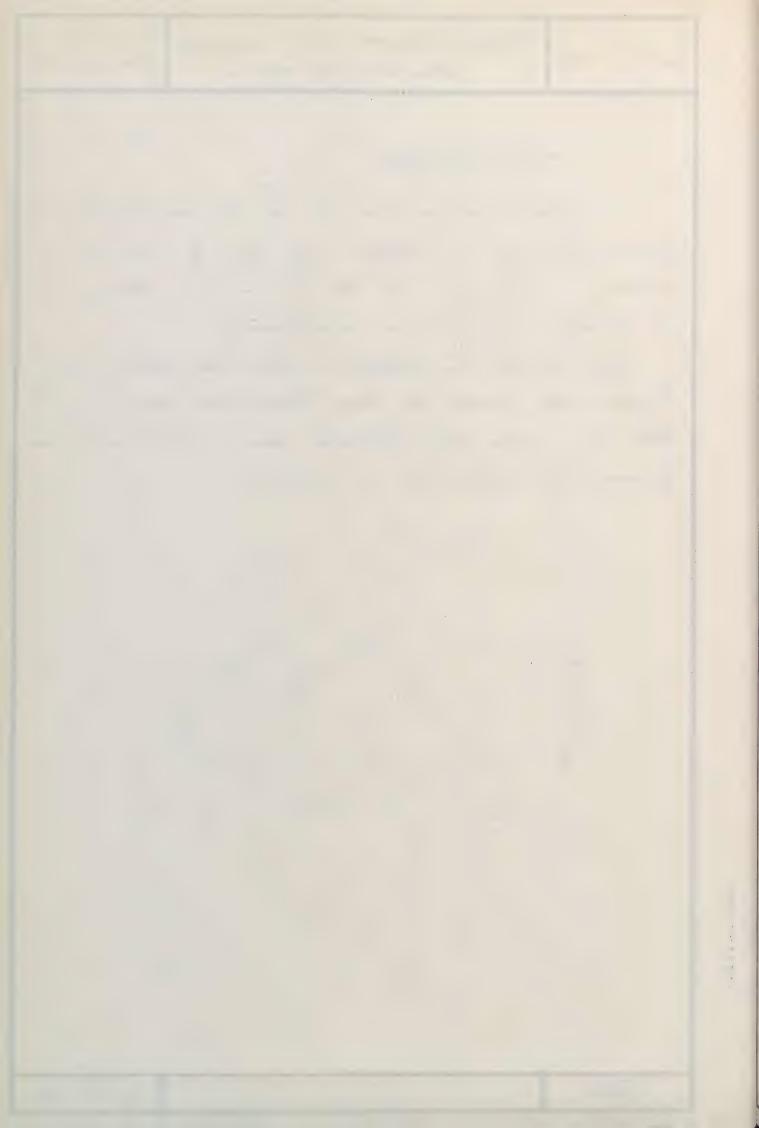


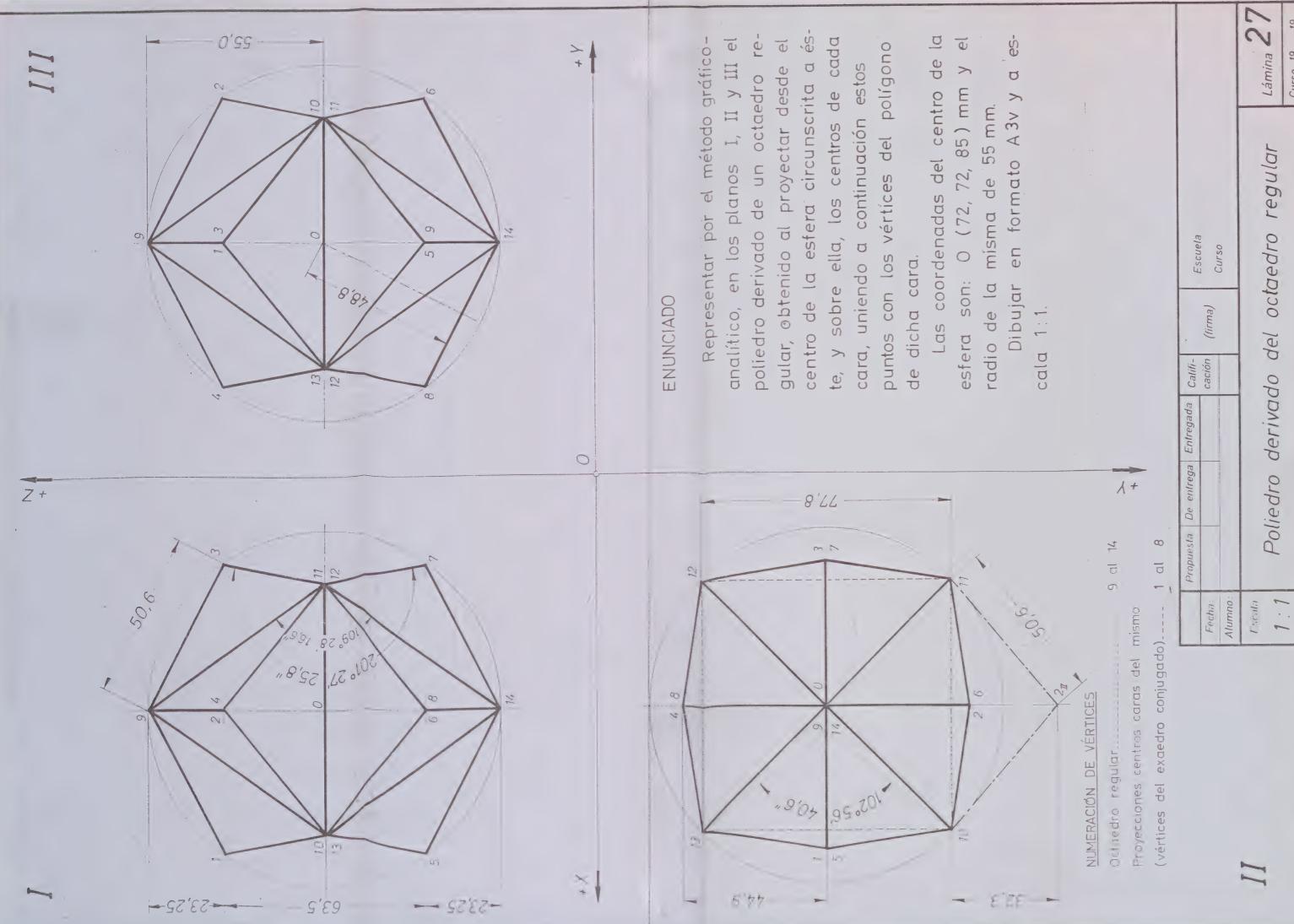
FIGURA CORPÓREA

de oblique un acoplamients de 21 caras ignales en franca de tricinquels inosceres, de bese ly = 77.8 mm. y altura p = 32,3 mm; en este trica quels el tado q. tiene el valor q = 50,6 mm (comprécación).

Para obtener este poliedro se formaran prenamente 8 piramides cectas de base triangular equilatera de lado "lo," cuyas caras laterales son 3 triangulos (ver figura) acoplados por su lado "q"

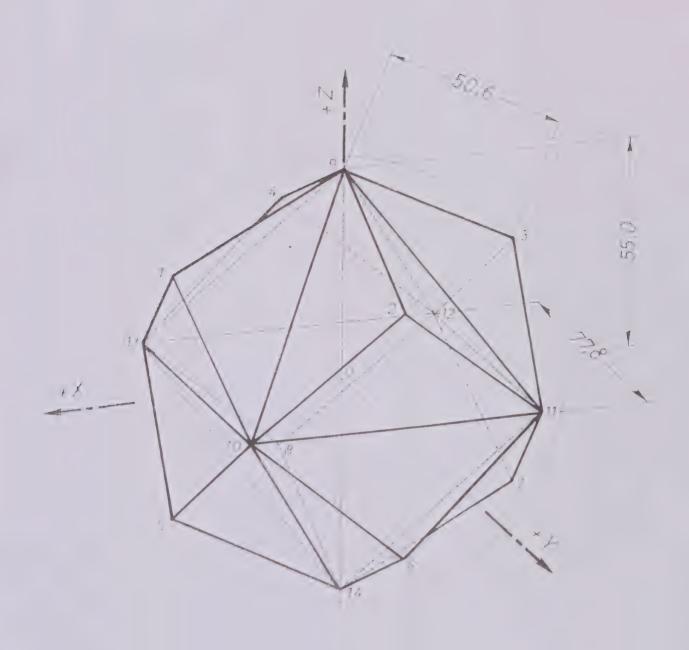






Curso 19







20

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico- analítico, en los planos I, II y III, el poliedro derivado de un dodecaedro regular, obtenido al proyectar desde el centro de
la esfera circumscrita a este, y sobre ella los centros
de cada cara, uniendo a continuación estos puntos
con los vértices del policono de diche
bas coordenadas del centro de la estera, son:

bas coordenadas del centro de la esfera, son:

0 (72, 72, 85) mm o el nadio de la misma, de 55 mm.

Dibujar en formato A3V o a escala 1:1.

1 Arrai

0 (73, 70 25) mm

010 = 55 111 11.

UNE A4 210 X 297

10 - 2. 70



Al estudiar el ejercicio propuesto en la la vina 55. le mos obtenido unas deducciones previas de carácter general, commes a los cinco poliedros regulares.

bas formulas alle deducidas las aplicaremos sucesistamente en este caso particular del doderardo recular. El desarrollo del cálculo correspondiente a esta tamina, se quira pues aquellas directrices, a las que haremos las oportunas referencias.

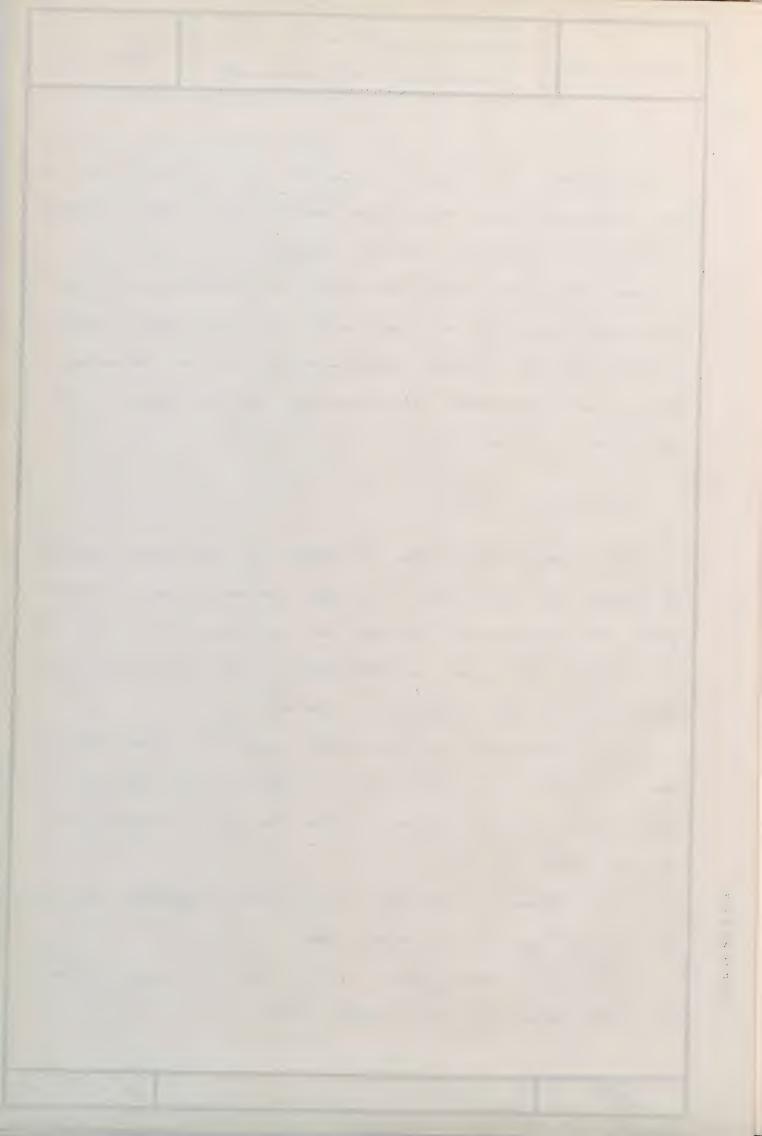
PROCESO GRÁFICO

En el enso del prisdo derivado del dodicardio recular, el proceso es immediats, ya que rabemos que el carengado del dodecardro cequíar es un icosardro, y esta representación ha sido ya realizada en el ejercicio de lamina 24, cuyo proceso nos permite:

Representar el dodecaedos regular dado, de vertices 13 al 32, inscrito en una esfera de 55 mm de radio Cestos virtices se han de corresponder con los 21 al 40

Obtener los vertices 1 al 12 del icosaedro conjugado inscrito en la misma espera.

Unix lo vertices 1 al 12 con los correspondientes de cada cara del dodecaedro Lado.



Il termina la apresentación de policio de cirado po-

 $C = 5 \times 12 = 60$ cares (res lam. 25 foran. [1]); de V = 12 + 20 = 32 restres (res lam. 25, foran. [2]); g de $A = 30 + 5 \times 12 = 90$ aristas (res lam. 25, foran. [3]).

La montración de la connexcidad de este poliedro la haremos analíticamente.

PROCESO GRÁFICO - ANALÍTICO

de la espera ciccumsoria al dodecaedro regula dade.

Número de caras "n" del dodecaedro dado

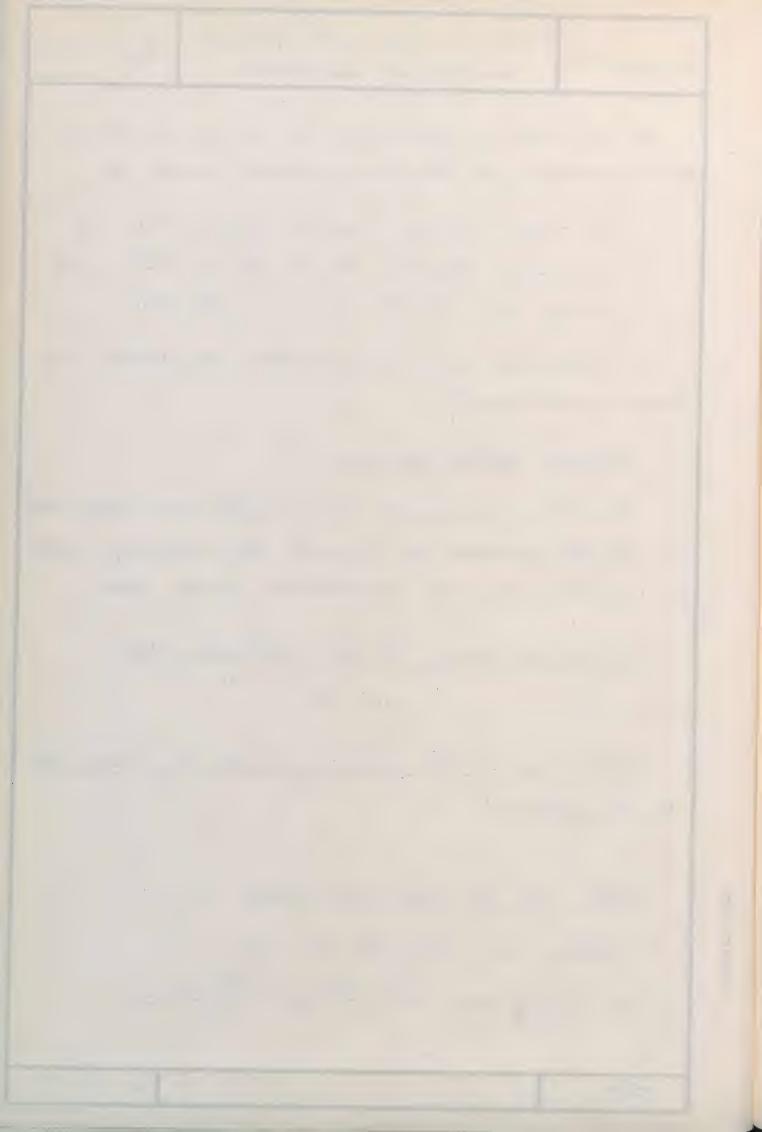
Radio "a12" de la espera es cursorità al mismo (dato del ejercicio).

bado "le" del dedesedo dado.

Le deduce de le firm. 30, Lam. 4

$$l_{12} = \frac{4}{\sqrt{15} + \sqrt{3}} \quad \alpha_{12} = \frac{4(\sqrt{15} - \sqrt{3})}{12} \quad \alpha_{12} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3} \quad \alpha_{12}$$

UNE A4 210 X 2



UNE A4 210 X 297

Radio "by" de la expera targente a la avistas del police.

Le deduce de la forme les 31, lans, il

$$b_1 = b_{12} = \frac{3 + \sqrt{5}}{4} \quad t_{12} = \frac{3 + \sqrt{5}}{4} \times \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3} \quad a_{12} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6} \quad a_{12}$$

Desarrollo del calculo anterior:
$$b_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \times \frac{\sqrt{15-\sqrt{3}}}{3}$$
 a_{12}

$$= \frac{(3+\sqrt{5})(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{12} q_{12} = \frac{3\sqrt{15}+\sqrt{75}-3\sqrt{3}-\sqrt{15}}{12} q_{12} = \frac{2\sqrt{15}+5\sqrt{3}-3\sqrt{3}}{12} q_{12} = \frac{2\sqrt{15}+5\sqrt{3}-3\sqrt{3}}{12}$$

$$\frac{2\sqrt{15} + 2\sqrt{3}}{12} a_{12} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6} a_{12}$$

Radio "C. " de la esfera inscrita en el mismo.

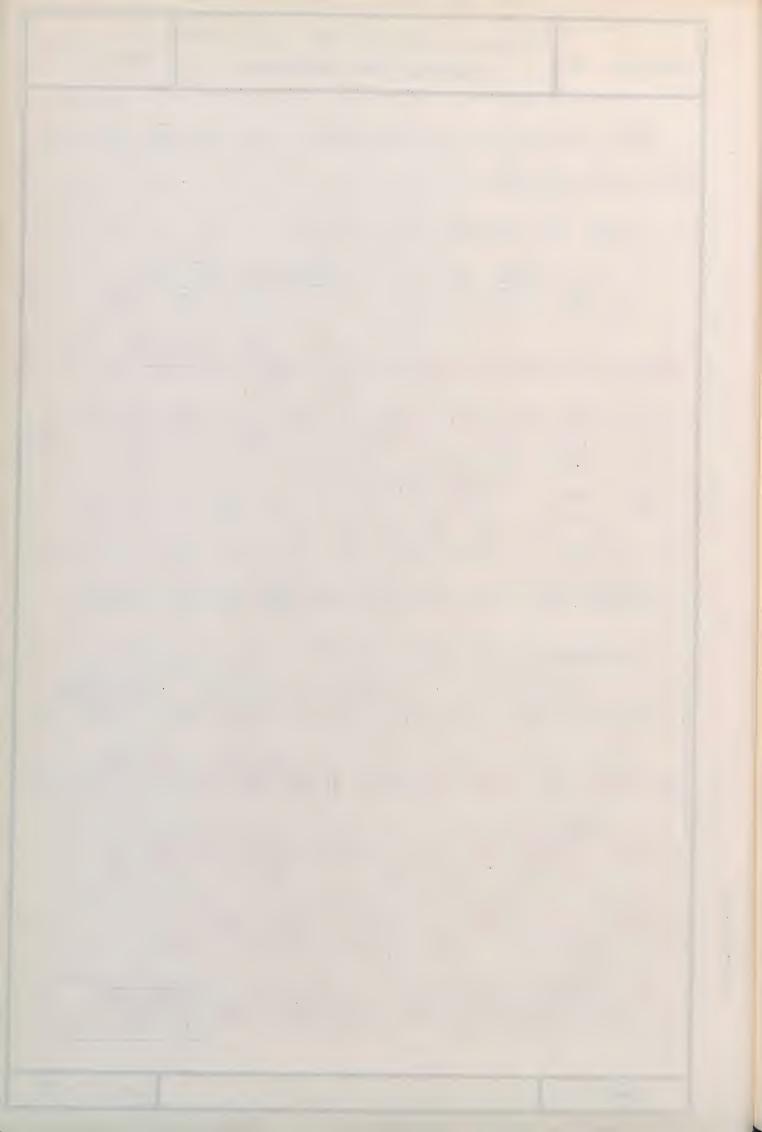
Le deduce de la form. 32, lan, 4

$$C_{12} = \sqrt{\frac{11}{40}} \frac{\sqrt{5} + 25}{40} \ell_{12} = \sqrt{\frac{11}{40}} \frac{\sqrt{5} + 25}{40} \times \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3} \alpha_{12} = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}} \alpha_{12}$$

$$-\sqrt{\frac{(11\sqrt{5}+25)(\sqrt{15}-\sqrt{3})^2}{40\times3^2}}\qquad \alpha_{12}=\sqrt{\frac{(11\sqrt{5}+25)(15+3-2\sqrt{45})}{40\times9}}\qquad \alpha_{12}=\sqrt{\frac{(11\sqrt{5}+25)(15+3-2\sqrt{45})}{40\times9}}\qquad \alpha_{12}=\sqrt{\frac{(11\sqrt{5}+25)(15+3-2\sqrt{45})}{40\times9}}$$

$$= \sqrt{\frac{(11\sqrt{5} + 25)(18 - 6\sqrt{5})}{40 \times 9}} \quad a_{12} = \sqrt{\frac{(25 + 11\sqrt{5})(6 - 2\sqrt{5})}{40 \times 3}} \quad a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{150 + 66 \sqrt{5} - 50 \sqrt{5} - 22 \times 5}{40 \times 3}} a_{12} = \sqrt{\frac{40 + 16 \sqrt{5}}{40 \times 3}} a_{12} = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}} a_{12}$$



ras ro

no regular de una cara del mimo.

Le deduce de la form. 33, lam. 1

$$d_{18} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} \ell_{12} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} \times \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3} a_{12} = \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{15}} a_{12}$$

Desarrollo del calculo anterior: $d_{12} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{\sqrt{15-\sqrt{3}}}{3} c_{12} =$

$$=\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(\sqrt{15}-\sqrt{3})^2}{10\times3^2}} \quad \alpha_{12} = \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(15+3-2\sqrt{45})}{10\times3^2}} \cdot \alpha_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{(5 + \sqrt{5})(18 - 6\sqrt{5})}{10 \times 9}} \quad a_{12} = \sqrt{\frac{(5 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})}{15}} \quad a_{12} = \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5} - 5\sqrt{5} - 5}{15}} \quad a_{12} = \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5} - 5\sqrt{5} - 5}{15}} \quad a_{12} = \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5} - 5\sqrt{5} - 5}{15}} \quad a_{12} = \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5} - 5\sqrt{5} - 5\sqrt{5}}{15}} \quad a_{12} = \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5} - 5\sqrt{5} - 5\sqrt{5}}{15}} \quad a_{12} = \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5} - 5\sqrt{5}}{15}} \quad a_{12} = \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{15}} \quad a_{13} = \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{$$

$$= \sqrt{\frac{10 \cdot 215}{15}} \, Q_{12}$$

Padio "k12" de la incumprencia inverita al princero cegular de una cara del mismo (apotema).

Le deduce de la fóronnela 39, lans 4

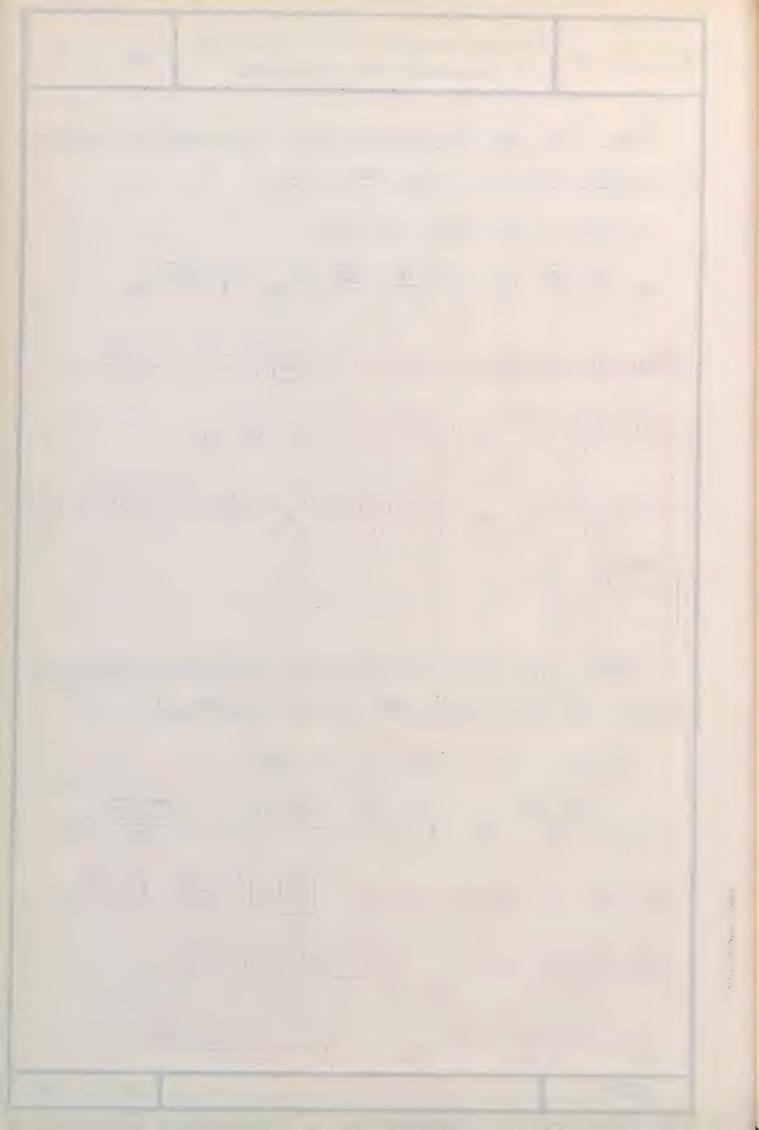
$$k_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} \quad \ell_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} \quad \alpha_{12} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{30}} \quad \alpha_{12}$$

Desarrollo del calculo auterior: $|k_{12}| = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} a_{12} =$

$$=\sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(\sqrt{15}-\sqrt{3})^2}{20\times3^2}} \quad a_{12} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(15+3-2\sqrt{45})}{20\times9}} \quad a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(18-6\sqrt{5})}{20\times9}} a_{12} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{10\times3}} a_{12} =$$

UNE A4 210 X



$$= \sqrt{\frac{15 + 6\sqrt{5} - 5\sqrt{5} - 10}{30}} a_{12} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{30}} a_{12}$$

Angrelo cectilines "242" del diedro del misuro

Le deduce de la foramela 34, lans,

sen P1 = 15 + 15

Emando como base los valores anteriores, deduciremos los signientes del poliedro derivado.

Angulo rectilines "2 × 12" del diedes formado por dos caras contiguas del poliedro decivado, en una arista del dodecaedro dado,

Le déduce de la fórmula general [4] (m lam. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

 $a_{12} \times \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{30}} a_{12}$ $\frac{1}{\sqrt{5+15}} = \frac{a_{12} k_{12}}{(k_{12})^2 - a_{12} C_{12} + (C_{12})^2} = \frac{a_{12} k_{12}}{(\sqrt{5+15} a_{12})^2 - a_{12} \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} a_{12}} = \frac{a_{12} k_{12}}{(\sqrt{5+2\sqrt{5}} a_{12})^2 - a_{12} \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} a_{12}}$

$$= 3 + \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{2}}$$

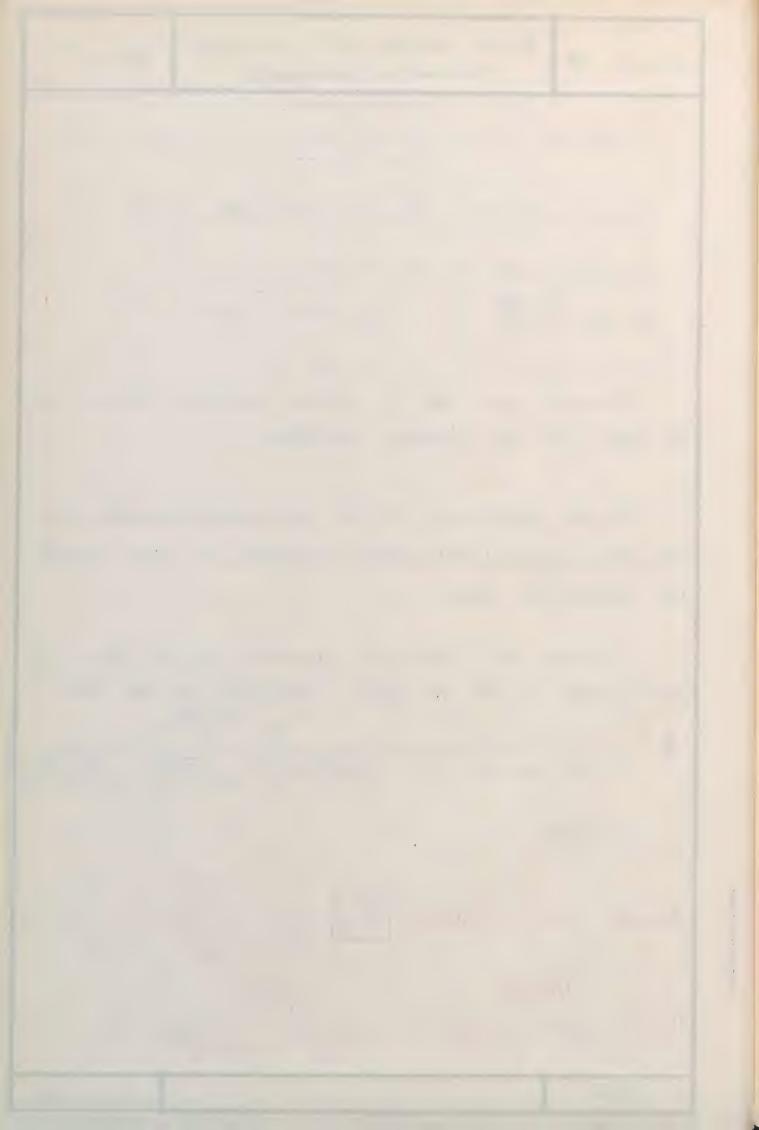
Desarrollo del cálculo anterior:
$$\frac{1}{5} \times \frac{5}{12} = \frac{\sqrt{5+15}}{30} + \frac{5+215}{15} + \frac{5+215}{15}$$

$$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{30}}$$

$$\sqrt{5+\sqrt{5}+2\sqrt{5}}$$

$$\frac{15+5\sqrt{5}}{30} - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}$$

11-7-72



$$\frac{\sqrt{30(5+\sqrt{5})}}{(15+5\sqrt{5})-\sqrt{60(5+2\sqrt{5})}} = \frac{\sqrt{30(5+\sqrt{5})}}{5(3+\sqrt{5})-2\sqrt{15(5+2\sqrt{5})}} = \frac{1}{5(3+\sqrt{5})-2\sqrt{15(5+2\sqrt{5})}}$$

$$\sqrt{30} (5 + \sqrt{5}) \times \left[5(3 + \sqrt{5}) + 2\sqrt{15}(5 + 2\sqrt{5}) \right]$$

25 × $(9 + 5 + 6\sqrt{5}) - 4 \times 15 \times (5 + 2\sqrt{5})$

$$\sqrt{30(5+\sqrt{5})} \times [5(3+\sqrt{5})+2\sqrt{15(5+2\sqrt{5})}]$$

= 350 + 150 $\sqrt{5}$ - 300 - 120 $\sqrt{5}$

$$\sqrt{30(5+VF)} \times [5(3+V5)+2Vi5(5+2V5)]$$

50+30 V5

$$\sqrt{30(5+\sqrt{5})} \times (3\sqrt{5}-5) \times [5(3+\sqrt{5})+2\sqrt{15(5+2\sqrt{5})}]$$
10 (3\sqrt{5}+5) (3\sqrt{5}-5)

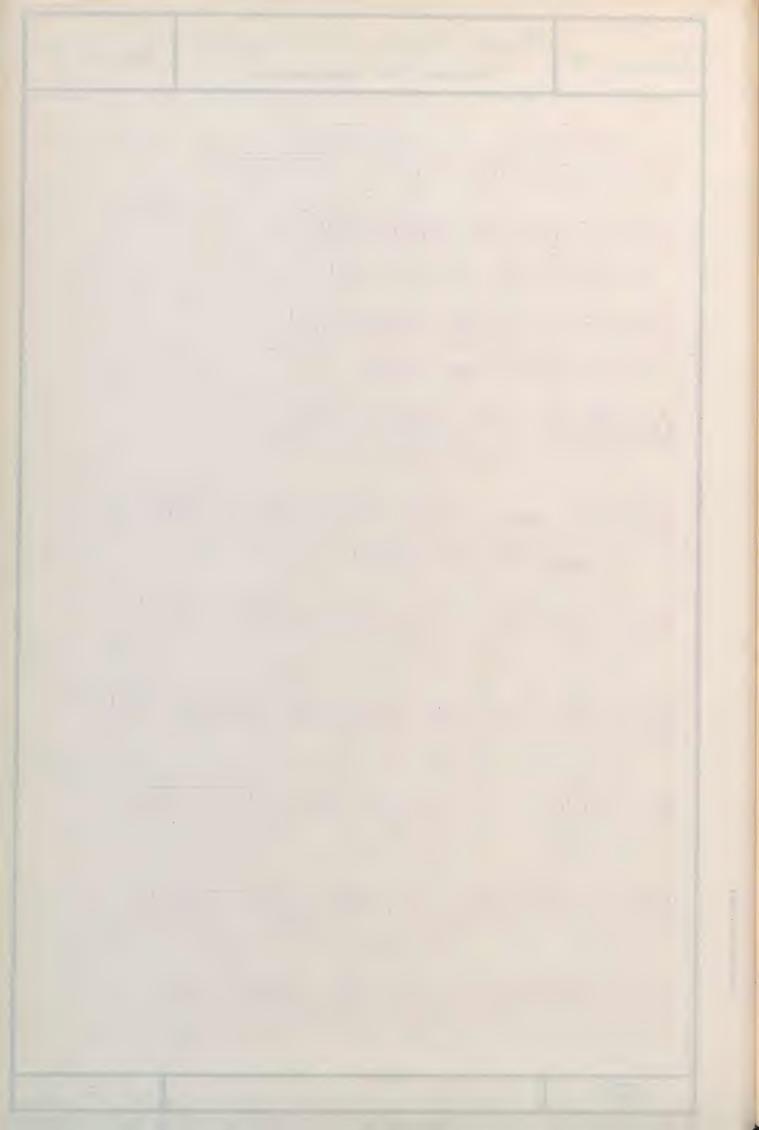
$$\sqrt{30(5+\sqrt{5})(3\sqrt{5}-5)^2} \times [5(3+\sqrt{5})+2\sqrt{15(5+2\sqrt{5})}]$$

$$\sqrt{30(5+\sqrt{5})(45+25-30\sqrt{5})} \times \left[5(3+\sqrt{5})+2\sqrt{15(5+2\sqrt{5})}\right]$$

$$\sqrt{30(5+\sqrt{5})(70-36\sqrt{5})} \times [5(3+\sqrt{5})+2\sqrt{15(5+2\sqrt{5})}]$$

$$\sqrt{300 (5 + \sqrt{5}) (7 - 3\sqrt{5})} = [5(3 + \sqrt{5}) + 2\sqrt{15}(5 + 2\sqrt{5})]$$

$$\sqrt{3}(35+7\sqrt{5}-15\sqrt{5}-15)$$
 \times $[5(3+\sqrt{5})+2\sqrt{15}(5+2\sqrt{5})$



$$= \frac{\sqrt{3(20-8\sqrt{5})} \times [5(3+\sqrt{5}) + 2\sqrt{15(5+2\sqrt{5})}]}{20}$$

$$\sqrt{3}(5-2\sqrt{5}) \times [5(3+\sqrt{5}) + 2\sqrt{15}(5+2\sqrt{5})]$$

$$5\sqrt{3(5-2\sqrt{5})} \times (3+\sqrt{5}) + 2\sqrt{3(5-2\sqrt{5})} \times \sqrt{15(5+2\sqrt{5})}$$

$$= \frac{5\sqrt{3(5-2\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^2} + 2\sqrt{45(5-2\sqrt{5})(5+2\sqrt{5})}}{10}$$

$$= \frac{5\sqrt{3}(5-2\sqrt{5})(9+5+6\sqrt{5})}{10} + 2\times 3\times \sqrt{5(25-20)}$$

$$= \frac{5\sqrt{3}(5-2\sqrt{5})(14-6\sqrt{5})}{10} + \frac{36}{2} = \frac{\sqrt{3}\times2(5-2\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})}{2} + 6$$

$$= \frac{\sqrt{6(35-14\sqrt{5}+15\sqrt{5}-30)}+6}{2} = 3+\sqrt{\frac{6(5+\sqrt{5})}{4}} = 3+\sqrt{\frac{3(5+\sqrt{5})}{2}} = \frac{3+\sqrt{\frac{3(5+\sqrt{5})}{2}}}{2} = \frac{3+\sqrt{\frac{3(5+\sqrt{5})}}}{2} = \frac{3+\sqrt{\frac{3(5+\sqrt{5})}}}}{2} = \frac{3+\sqrt{\frac{3(5+\sqrt{5})}}}{2} = \frac{3+\sqrt{\frac{3(5+\sqrt{5})}}}}{2} = \frac{3+\sqrt{\frac{3(5+\sqrt{5})}}}}{2}$$

$$= 3 + \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{2}}$$

El valor numérics de «, en grados rexagesimales, será:

$$\frac{1}{5} \propto_{12} = 3 + \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{2}} = 6,29.45.56.4.$$
; $\frac{1}{9} t_{9} \alpha_{12} = 0.79.89.657$

El valor X12 < 90° nos demuestra la convexidant



del policoles derivado (ver lan. 25, "Consideraciones previas").

Altura "P" de una cara lateral de la piramide recta formada en cada cara del dodecardo dado (cara del poliedro derivado).

Le deduce de la formule general [5] (ver lam. 25), sustituyends en ella los valores particulares de este caso.

$$\beta = \sqrt{(a_{12} - C_{12})^2 + |k_{12}|^2} = \sqrt{\left[a_{12} - \left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} a_{12}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{30}} a_{12}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$= \sqrt{\frac{9+\sqrt{5}}{6}} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} = \frac{1}{12}$$

$$\left(=\sqrt{\left(1-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)^2+\frac{5+\sqrt{5}}{30}} a_{12}\right)$$

Desarrolle del calculo anterior: $p = \sqrt{\left[a_{12} - \left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} a_{12}\right]^2 + \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{36}} a_{12}\right)^2}$

$$=\sqrt{\left(1-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)^2(a_{12})^2+\frac{5+\sqrt{5}}{30}(a_{12})^2}=\sqrt{1+\frac{5+2\sqrt{5}}{15}-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}+\frac{5+\sqrt{5}}{30}a_{12}}$$

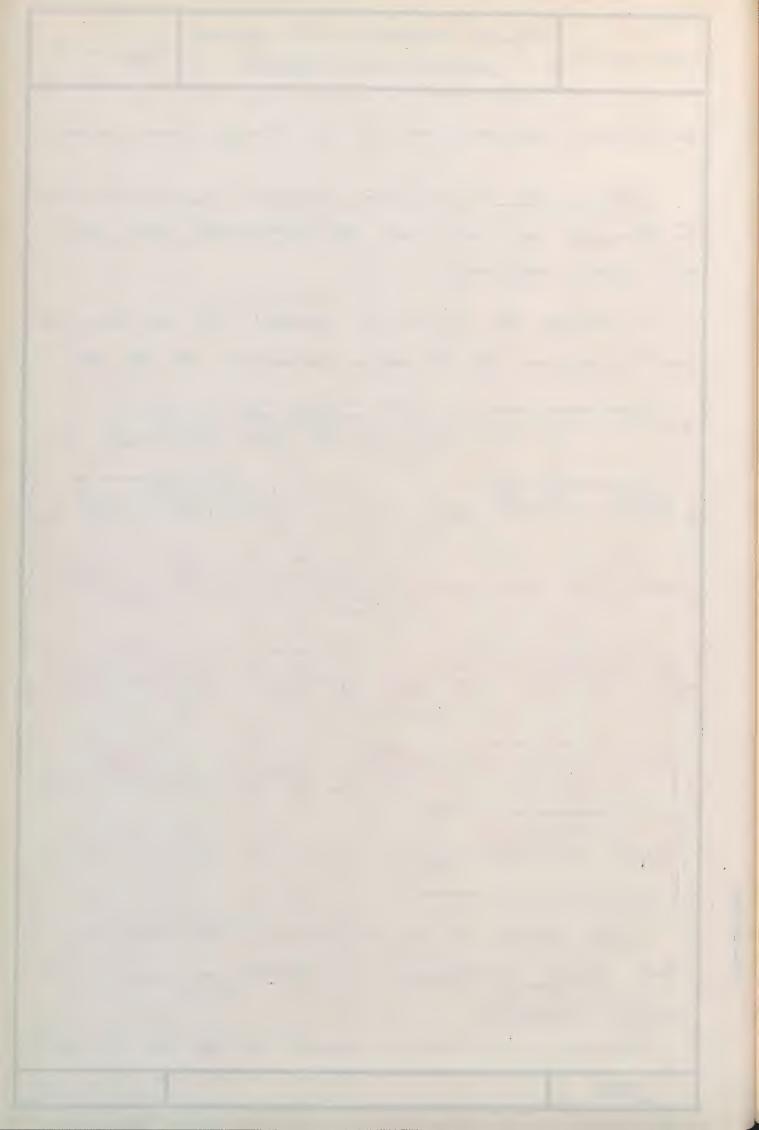
$$= \sqrt{\frac{30 + 10 + 4\sqrt{5} + 5 + \sqrt{5}}{30}} - 2\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}} \quad a_{12} = \sqrt{\frac{45 + 5\sqrt{5}}{30}} - 2\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}} \quad a_{12} = \sqrt{\frac{45 + 5\sqrt{5}}{30}} - 2\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}} \quad a_{12} = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}} = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}$$

$$= \sqrt{\frac{9+\sqrt{5}}{6}} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} = a_{12}$$

lado aqual del tranquis issereles de una cara del poliedro derivado.

Le deduce de la foremula general [6] (ver lan. 25) susti-

Je a



Tuyendo en elle de Jalones pertendes de este esto.

$$Q = \sqrt{(a_{12} - C_{12})^2 + (d_{12})^2} = \sqrt{[a_{12} - (\sqrt{\frac{5+2\sqrt{E}}{15}} a_{12})]^2 + (\sqrt{\frac{10-2\sqrt{E}}{15}} a_{12})^2} =$$

$$= \sqrt{2 - 2\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}} \quad \alpha_{12} \qquad \left(= \sqrt{\left(1 - \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}\right)^2 + \frac{10 - 2\sqrt{5}}{15}} \quad \alpha_{12} \right)$$

Desarrollo del caricalo autoros:
$$9 - \sqrt{\left[a_{12} - \left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} a_{12}\right)\right]^2 + \left(\sqrt{\frac{15-2\sqrt{5}}{15}} a_{12}\right)^2} =$$

$$=\sqrt{\left(1-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)^2\left(a_{12}\right)^2+\frac{10-2\sqrt{5}}{15}\left(a_{12}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{5+2\sqrt{5}}{15}-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}+\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}a_{22}=$$

$$= \sqrt{\frac{15+5+2\sqrt{5}+10-2\sqrt{5}}{15}} \cdot \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \cdot Q_{12} = \sqrt{\frac{2-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}{15}} \cdot Q_{12}$$

Legemento "t" que se obliene al una los extremos de dos lados consecutivos del políques de una cara del dodecaedos dado.

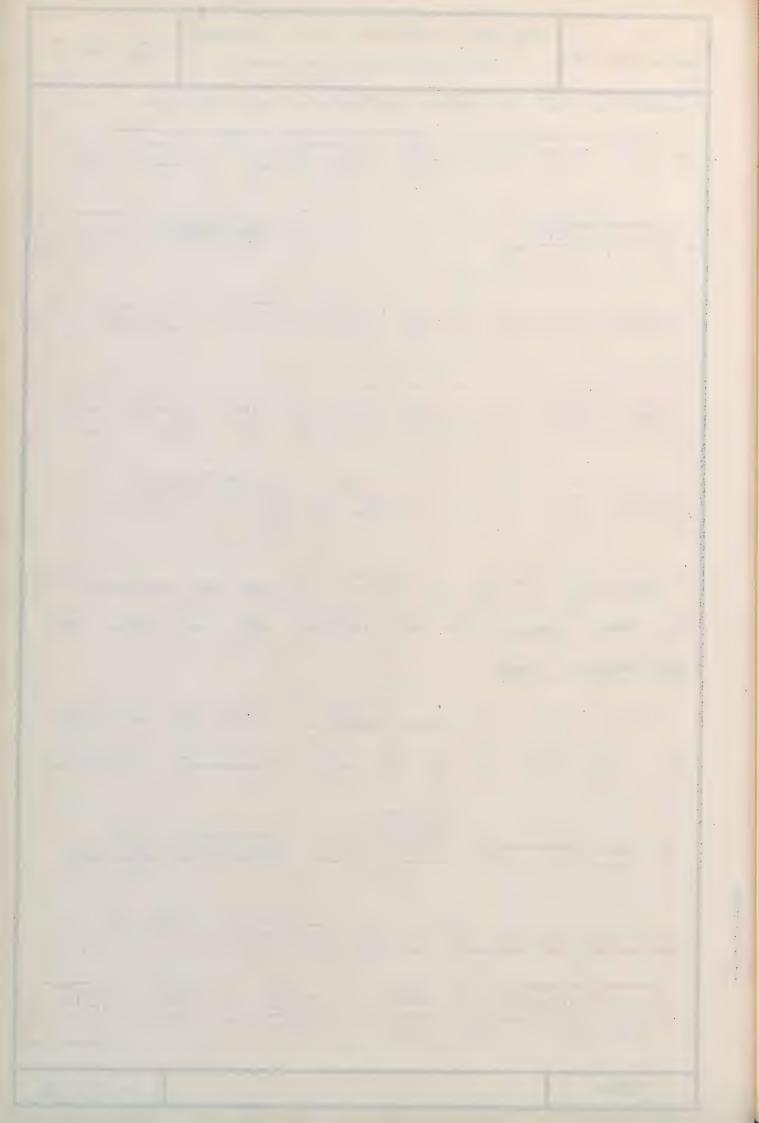
Es la diagonal del pentagono regular de lado le ; su valor s/ la geometric racional, se obtiene

$$t = \frac{d_{12}}{2} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{15}} d_{12}}{2} \times \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} d_{12}$$

Desarrolle del calcule auterion: It: \10-21\overline{15} \times \frac{\sqrt{10-21\overline{15}}}{2} = \frac{10-21\overline{15}}{2} \times \frac{10-21\overline{15}}{2} = \frac{1}{2} = \

$$\frac{\sqrt{(0-2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}}{2\sqrt{15}} a_{12} = \frac{\sqrt{80}}{2\sqrt{15}} a_{12} = \frac{4\sqrt{5}}{2\sqrt{15}} a_{12} = 2\sqrt{\frac{5}{15}} a_{12} = \frac{2\sqrt{3}}{3} a_{12}$$

(ED.



Angrelo certificas de desar 21/12" formado por dos caras la terales centiques en las aristes de la piramide recta.

Le deduce de la formula general [7] (ver lam. 25), sustitujendo en ella los vaisses partientares de este sase.

sen
$$V_{12} = \frac{tg}{2 l_{12} p} = \frac{2 \sqrt{3}}{3} a_{12} \times \sqrt{2 - 2} \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}} a_{12} = \frac{2 l_{12} p}{2 \times \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3} a_{12} \times \sqrt{\frac{9 + 15}{6} - 2\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}} a_{12}}{2 \times \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3} a_{12} \times \sqrt{\frac{9 + 15}{6} - 2\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}} a_{12}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15} - \sqrt{3}} \times \frac{9}{P} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \times \frac{9}{P} = \frac{0.8090170 \times 0.6462518}{6.5323242} = 0.9739554.$$

sen
$$\sqrt{12} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \times \sqrt{\left[2-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right] \cdot \left[\frac{9+15}{6} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right]}$$

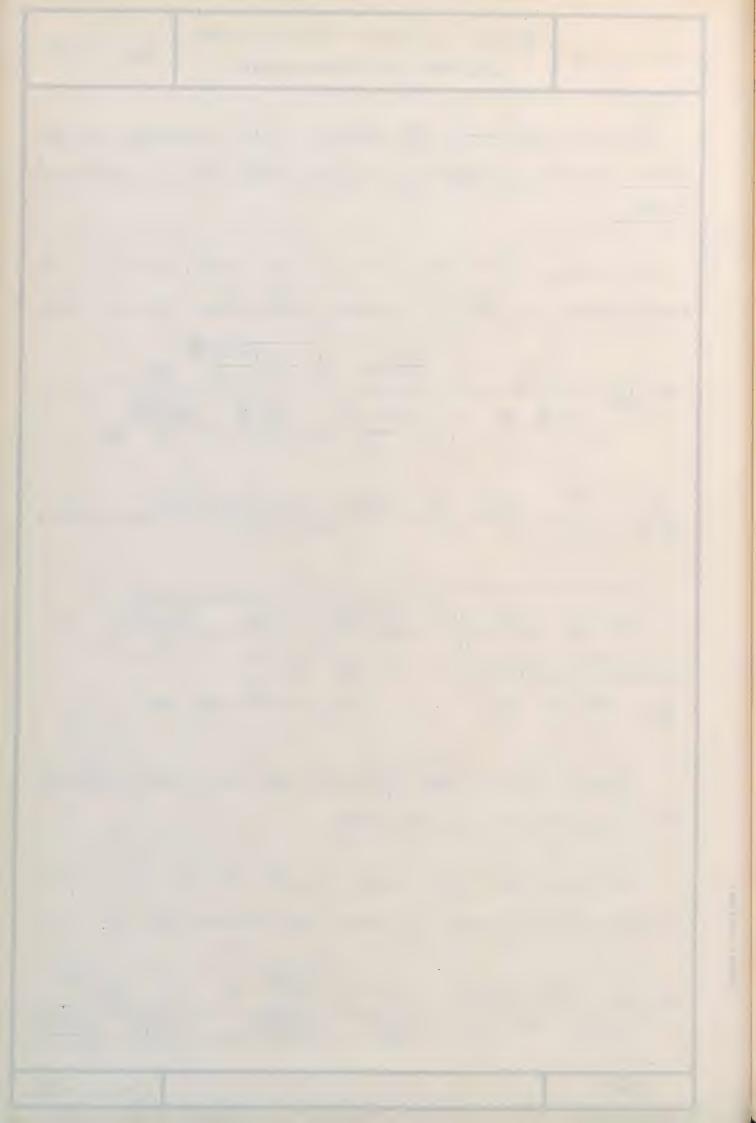
 $V_{12} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{$

de la piramide y su base.

fe deduce de la formula general [8] (ver lan. 25), sustituyends en ella les valores particulares de este caso.

nene
$$\beta_{12}$$
 = $a_{12} - C_{12}$ $a_{12} - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} a_{12}$ $a_{12} - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}$ $a_{12} - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}$ $a_{12} - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}$ $a_{12} - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}$

UNE A4 210 X 2



de mois manueres de fire de totiens como reque:

lg. cen Biz = log. 0,38 57 52 7 = 7,58 63 090

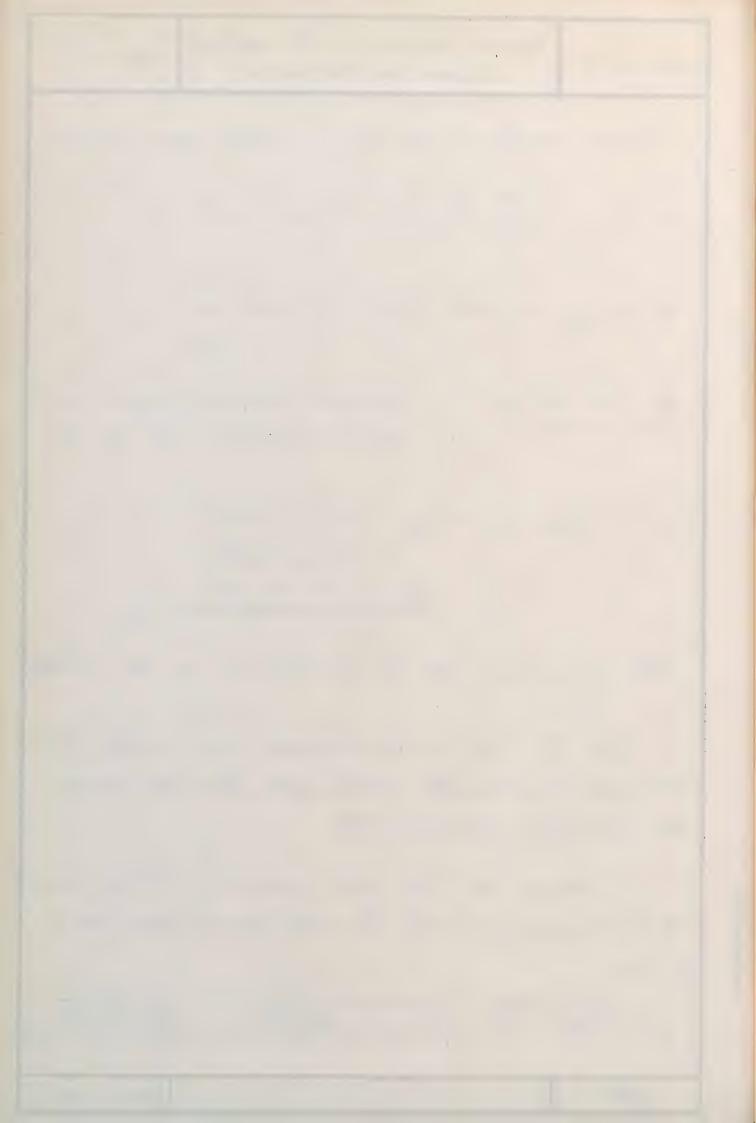
B12 = 22° 41' 25,7" debiendo verificarse como comprobacion (ver form. [11], lam. 25)

valor coincidente con el ya obtenido en este estudo

Radio "b2" de la esfera taugente a las aristas latereales de las piramides rectas ouyas bases son caras del dodecardo regular dado.

Le deduce de la formula general [9] (ver lan. 25), sustetuyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$b_2 - \sqrt{(a_{12})^2 - \frac{q^2}{4}} = \sqrt{1 - (2 - 2\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}) \cdot 4} \quad a_{12} = \sqrt{(1 + \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}) \cdot 2} \quad a_{12}$$



Ladio "Ci de le esfera inscrita en el précides derivada

Le déduce de la forente general [10] (ver lan. 21) sustitujendo en ella los valores partientares de este easo.

en la que b, =
$$\frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6}$$
 a 12, 7

de esta cillima se obtiene:

sen
$$\propto_{12} = \frac{t_{3} \propto_{12}}{\sqrt{1 + t_{3}^{2} \propto_{19}}} = \frac{3 + \sqrt{15 + 3\sqrt{5}}}{\sqrt{1 + \left(3 + \sqrt{15 + 3\sqrt{5}}\right)^{2}}}$$

por la que

$$C_{1} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6} \times \frac{3 + \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{2}}}{\sqrt{1 + \left(3 + \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{2}}\right)^{2}}} \qquad a_{12} = 0.93 \ 41 \ 72 \ 4 \ \text{nex} \ K_{12} \ a_{12}$$

$$\frac{c_{1}}{a_{12}} = \frac{log}{0.93} \quad \frac{0.93}{41} \quad \frac{41}{72} \quad \frac{4}{4} \quad \frac{lg}{169} \quad \frac{80^{\circ}}{58} \quad \frac{58'}{22.8''} = \frac{7}{1.994} \quad \frac{970}{58} \quad \frac{42}{58} \quad \frac{75}{7.965} \quad \frac{7}{1965} \quad \frac{45}{1965} \quad \frac{1}{1965} \quad \frac$$

C, = 0.92 26 02 1 x 912

Este mismo valor se juede deduces, com protescion, de la formula equivalente [10'] (ver la m. 25), en la que

C1 = b2 sen 1/2 = V(1+ V5+2VF):2 x sen V12 x 912



anys statures ommercias con :

$$C_{1} = \sqrt{\left(1 + \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)} : 2 \times \frac{1+\sqrt{5}}{4} \times \sqrt{\left[2-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right]} : \left[\frac{9+\sqrt{5}}{6} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right] \times G_{12}$$

valor coincidente con el ya obtenido anteriormente.

Area lateral "S" del poliedro derivado

Le obtiene como suma de las areas laterales de las doce peraindes acctas de base sentagamas requéar de lado "l,2", cuyas caras laterales con triangulos isos celes de base "l,2" y altera "p" ya determinados.

$$S = 12 \times 5 \times \frac{\ell_{12} \times p}{2} = 30 \times \frac{\sqrt{15 - 13}}{3} \times \sqrt{\frac{q + \sqrt{5}}{6}} - 2\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}} \times \left[a_{12}\right]^{2}$$

= 30 × 0.71 36 44 2-- × 0.53 23 24 2...
$$(a_{12})^2 = 11$$
, 39 67 02 3 $(a_{12})^2$

Volumen "V" del poliedro derivado

Le obtiene como suma del volumen del dodecardo dado j de las dece pramades jermadas un sus caras.

ECS

19-7-72



siendo "S" el arra de una cara del dodecardro, j

ver lam. te, Para obtener V12 en frencion de a12, forms. It , 30 que not done

$$V_{12} = \frac{7\sqrt{5} + 15}{4} \left(\ell_{12} \right)^3 = \frac{7\sqrt{5} + 15}{4} \times \left(\frac{4}{\sqrt{15} + \sqrt{3}} q_{12} \right)^3 = \frac{2\left(5\sqrt{3} + \sqrt{15} \right)}{9} \left(q_{12} \right)^3$$

Desarrollo del calculo anterior: $V_{12} = \frac{7\sqrt{5} + .15}{4} \times \left(\frac{4}{\sqrt{15} + \sqrt{3}} a_{12}\right)^{3} =$

$$= \frac{7\sqrt{5} + 15}{4} \times \left(\frac{4(\sqrt{15} - \sqrt{3})}{15 - 3} a_{12}\right)^{2} = \frac{7\sqrt{5} + 15}{4} \times \left(\frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3} a_{12}\right)^{3} =$$

$$= \frac{(7\sqrt{5} + .15) \times (15\sqrt{15} - 3 \times 15 \times \sqrt{3} + 3\sqrt{15} \times 3 - 3\sqrt{3})}{4 \times 27} (a_{12})^{3} =$$

 $\frac{(7\sqrt{5}+15) \times (24\sqrt{15}-48\sqrt{3})}{4\times 27} (a_{12})^{3} = \frac{(7\sqrt{5}+15)(\sqrt{15}-2\sqrt{3}) \times 6}{27} (a_{$

$$= \frac{6 \times (7 \sqrt{75} + 15 \sqrt{15} - 14 \sqrt{15} - 30 \sqrt{3})}{27} (a_{12})^{3} = \frac{6 \times (35 \sqrt{3} - 30 \sqrt{3} + \sqrt{15})}{27} (a_{12})^{3}$$

$$= \frac{2(5\sqrt{3} + \sqrt{15})}{9}(a_{12})^{3}$$

For the parte, teneuros que (ver lam. L., John. 40)

$$S_{5} = \frac{\sqrt{25 + 10 \, \text{VF}}}{4} \left(\ell_{12}\right)^{2} = \frac{\sqrt{25 + 10 \, \text{VF}}}{4} \times \left(\frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3} \, a_{12}\right)^{2} = \frac{\sqrt{10 \times (5 - \sqrt{5})}}{6} \left(a_{12}\right)^{2}$$



Desarrollo del cálculo anterior: $S_5 = \frac{125 + 10 \sqrt{5}}{4} \times \left(\frac{115 \cdot \sqrt{3}}{3} q_{12}\right)^2$

$$\left(\frac{\sqrt{15} \cdot \sqrt{3}}{3} q_{12}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}}{4} \times \frac{15 + 3 - 2\sqrt{45}}{9} \left(a_{12}\right)^{2} = \frac{\sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}}{4} \times \frac{6(3 - \sqrt{5})}{9} \left(a_{12}\right)^{2} =$$

$$= (a_{12})^2 = \frac{\sqrt{25 + 100}}{4}$$

$$\frac{6(3-\sqrt{5})}{9}(a_{12})^{2}=$$

$$\frac{\sqrt{25+10} \sqrt{5} \times (3-\sqrt{5})}{6} \left(a_{12}\right)^{2} = \frac{\sqrt{(25+10) \sqrt{5}} (3-\sqrt{5})^{2}}{6} \left(a_{12}\right)^{2} =$$

$$(a_{12})^2 = \frac{\sqrt{(25+10)}}{}$$

$$-\left(a_{12}\right)^{2}=$$

$$-\left(a_{12}\right)^{2}$$

$$\sqrt{(25 + 10 \sqrt{5})(14 - 6 \sqrt{5})} \left(a_{12}\right)^{2} = \frac{\sqrt{(25 + 10 \sqrt{5})(7 - 3 \sqrt{5}) \times 2}}{6} \left(a_{12}\right)^{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} \times (175 + 70 \sqrt{5} - 75 \sqrt{5} - 150)}{(a_{12})^{2}} \left(a_{12}\right)^{2} = \frac{\sqrt{2}(25 - 5\sqrt{5})}{6} \left(a_{12}\right)^{2} =$$

$$\left(a_{12}\right)^{2}$$

$$= \frac{\sqrt{10(5-\sqrt{5})}}{6} (a_{12})^{2}$$

$$h = a_{12} - c_{12} = \left(1 - \sqrt{\frac{5 + 215}{15}}\right) a_{12}$$

y finalmente

$$V = V_{12} + 12 \times \frac{S_5 \times h}{3} = \frac{2(5\sqrt{3} + \sqrt{15})}{9} (a_{12})^3 + 4 \times \frac{\sqrt{10(5 - \sqrt{5})}}{6} \times h \times (a_{12})^2$$

$$= \left[\frac{2/5\sqrt{3} + \sqrt{15}}{9} + \frac{2\sqrt{10(5-\sqrt{5})}}{3} \times \left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \right) \left(a_{12} \right)^{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{3} + \frac{$$

$$=\frac{2\sqrt{10(s-\sqrt{5})}}{3}\left(a_{12}\right)^{2}$$

Desarrollo del calculo auterior;

$$V_{3} \left[\frac{2(5\sqrt{3}+\sqrt{15})}{9} + \frac{2\sqrt{10}(5-\sqrt{5})}{3} \times \left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \right) \left(a_{12} \right)^{3} + \frac{2\sqrt{15}}{3} \times \left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \right) \left(a_{12} \right)^{3} + \frac{2\sqrt{15}}{3} \times \left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \right) \left(a_{12} \right)^{3} + \frac{2\sqrt{15}}{3} \times \left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \right) \left(a_{12} \right)^{3} + \frac{2\sqrt{15}}{3} \times \left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \right) \left(a_{12} \right)^{3} + \frac{2\sqrt{15}}{3} \times \left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \right) \left(a_{12} \right)^{3} + \frac{2\sqrt{15}}{3} \times \left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \right) \left(a_{12} \right)^{3} + \frac{2\sqrt{15}}{3} \times \left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \right) \left(a_{12} \right)^{3} + \frac{2\sqrt{15}}{3} \times \left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \right) \left(a_{12} \right)^{3} + \frac{2\sqrt{15}}{3} \times \left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \right) \left(a_{12} \right)^{3} + \frac{2\sqrt{15}}{3} \times \left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \right) \left(a_{12} \right)^{3} + \frac{2\sqrt{15}}{3} \times \left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \right) \left(a_{12} \right)^{3} + \frac{2\sqrt{15}}{3} \times \left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \right) \left(a_{12} \right)^{3} + \frac{2\sqrt{15}}{3} \times \left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \right) \left(a_{12} \right)^{3} + \frac{2\sqrt{15}}{3} \times \left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \right) \left(a_{12} \right)^{3} + \frac{2\sqrt{15}}{3} \times \left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \right) \left(a_{12} \right)^{3} + \frac{2\sqrt{15}}{3} \times \left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \right) \left(a_{12} \right)^{3} + \frac{2\sqrt{15}}{3} \times \left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \right) \left(a_{12} \right)^{3} + \frac{2\sqrt{15}}{3} \times \left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \right) \left(a_{12} \right)^{3} + \frac{2\sqrt{15}}{3} \times \left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \right) \left(a_{12} \right)^{3} + \frac{2\sqrt{15}}{3} \times \left$$



$$= \left[\frac{2}{9} \left(5\sqrt{3} + \sqrt{15} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{10} \left(5 - \sqrt{5} \right) - \frac{2}{3} \sqrt{10} \left(5 - \sqrt{5} \right) \times \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}} \right] \left(a_{12} \right)^{3} =$$

$$= \left[\frac{2}{9} \left(5\sqrt{3} + \sqrt{15} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{10 \left(5 - \sqrt{5} \right)} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{10 \left(5 - \sqrt{5} \right) \left(5 + 2\sqrt{5} \right)}{15}} \right] \left(a_{\mu} \right)^{3} =$$

$$= \left[\frac{2}{9} \left(5\sqrt{3} + \sqrt{15} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{10 \left(5 - \sqrt{5} \right)} - \frac{2}{3} \sqrt{10 \left(25 - 5\sqrt{5} + 10\sqrt{5} - 10 \right)} \right] \left(a_{12} \right)^{3} = \frac{1}{3} \left[\frac{2}{9} \left(5\sqrt{5} + \sqrt{15} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{10 \left(25 - 5\sqrt{5} + 10\sqrt{5} - 10 \right)} \right] \left(a_{12} \right)^{3} = \frac{1}{3} \left[\frac{2}{9} \left(5\sqrt{5} + \sqrt{15} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{10 \left(25 - 5\sqrt{5} + 10\sqrt{5} - 10 \right)} \right] \left(a_{12} \right)^{3} = \frac{1}{3} \left[\frac{2}{9} \left(5\sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{15} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{10 \left(25 - 5\sqrt{5} + 10\sqrt{5} - 10 \right)} \right] \left(a_{12} \right)^{3} = \frac{1}{3} \left[\frac{2}{9} \left(5\sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{5$$

$$= \left[\frac{2}{9} \left(5\sqrt{3} + \sqrt{15} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{10} \left(5 - \sqrt{5} \right) - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{10}{15} \left(15 - 5\sqrt{5} \right)} \right] \left(a_{12} \right)^{3} =$$

$$= \left[\frac{2}{9} \left(5\sqrt{3} + \sqrt{15}\right) + \frac{2}{3} \sqrt{10 \left(5 - \sqrt{5}\right)} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{10 \left(3 - \sqrt{5}\right)}{3}}\right] \left(a_{12}\right)^{3} =$$

$$= \left[\frac{2}{9} \left(5\sqrt{3} + \sqrt{15} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{10 \left(5 - \sqrt{5} \right)} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{10}{3}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}} \right] \left(a_{12} \right)^{3} =$$

$$= \left[\frac{2}{9} \left(5\sqrt{3} + \sqrt{15} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{10} \left(5 - \sqrt{51} \right) - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{10}{3}} \cdot \left(\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \right] \left(a_{12} \right)^{3} =$$

$$= \left[\frac{2}{9}\left(5\sqrt{3} + \sqrt{15}\right) + \frac{2}{3}\sqrt{10\left(5 - \sqrt{5}\right)} - \frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{50}{6}} + \sqrt{\frac{10}{6}}\right)\right] \left(a_{12}\right)^{3} =$$

$$= \left[\frac{2}{9} \left(5\sqrt{3} + \sqrt{15} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{10} \left(5 - \sqrt{5} \right) - \frac{6}{9} \left(\sqrt{\frac{50}{6}} + \sqrt{\frac{10}{6}} \right) \right] \left(a_{12} \right)^{3} =$$

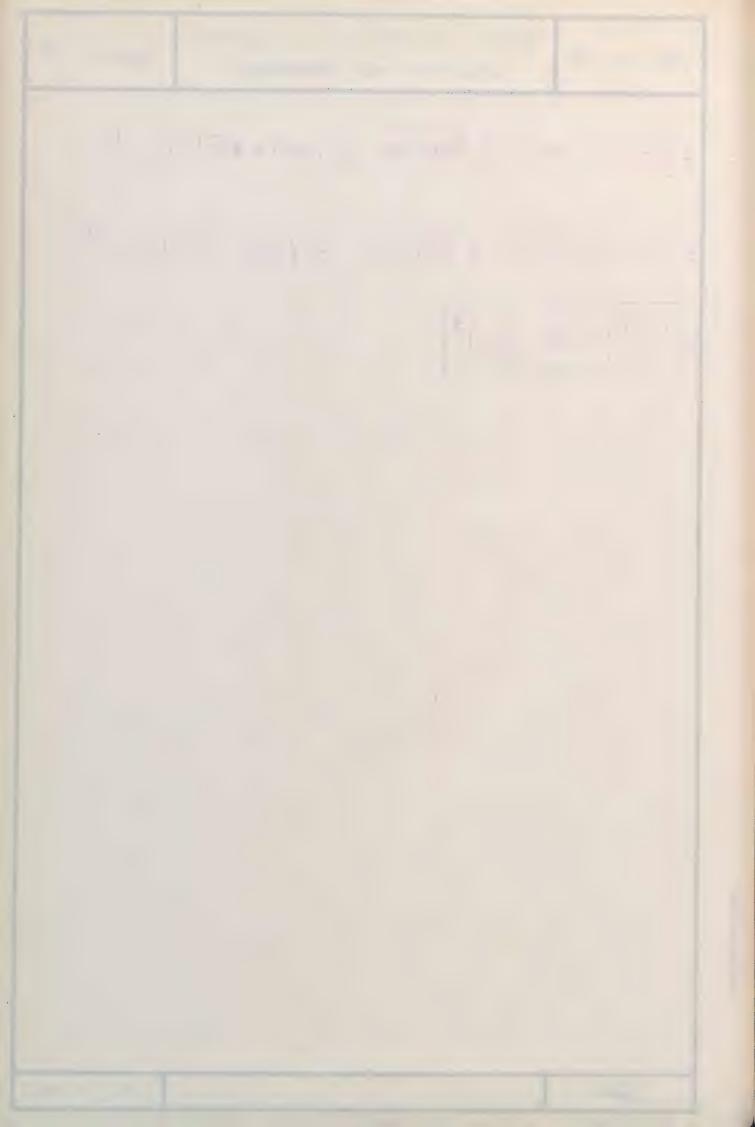
$$= \left[\frac{2}{9} \left(5 \sqrt{3} + \sqrt{15} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{10 \left(5 - \sqrt{5} \right)} - \frac{1}{9} \left(\sqrt{300} + \sqrt{60} \right) \right] \left(a_{12} \right)^{3} =$$



$$= \left[\frac{2}{9} \left(5\sqrt{13} + \sqrt{15} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{10(5-\sqrt{5})} - \frac{1}{9} \left(10\sqrt{3} + 2\sqrt{15} \right) \right] \left\{ a_{12} \right\}^{3} =$$

$$= \left[\frac{2}{9} \left(5\sqrt{3} + \sqrt{15} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{10 \left(5 - \sqrt{5} \right)} - \frac{2}{9} \left(5\sqrt{3} + 2\sqrt{15} \right) \right] \left(22 \right)^{3} =$$

$$= \frac{2\sqrt{10(5-\sqrt{5})}}{3} (a_{12})^{3}$$



on it much simple que dons a continue in acco

CUADRO SINÓPTICO

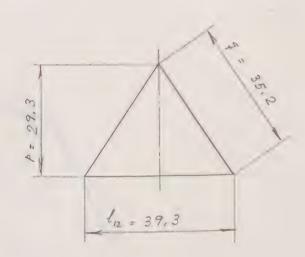
Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
l ₁₂	<u>VIS - V3</u> a ₁₂	0. 71 36 44 a ₁₂
6,	$\frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6}$ a_{12}	0. 93 47 72 A ₁₂
b ₂	$\sqrt{(1+\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}):2}$ a_{12}	0, 94 72 74
C ₁₂	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \ \alpha_{12}$	0. 79 46 55 a ₁₂
C, 2	$\frac{\sqrt{\sqrt{15} + \sqrt{3}} \times \left(3 + \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{2}}\right) \cdot \sqrt{1 + \left(3 + \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{2}}\right)^{2}} \times \alpha_{12}}{\sqrt{\left(1 + \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}\right) \cdot 2} \times \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right) \times \sqrt{\left[2 - 2\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}\right] \cdot \left[\frac{9 + \sqrt{5}}{6} - 2\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}\right]} \alpha_{12}}$	0, 92 26 02 012
d ₁₂	$\sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{15}} Q_{12}$	0, 60 70 62a ₁₂
K12	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{30}} \ a_{12}$	0, 49 11 24 012
2 4,2	sen $\psi_{12} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}$ $\psi_{12} = 58^{\circ} 16' 57.1''$	sen $\Psi_{12} = 0.85 06 51$ 2 $\Psi_{12} = 116^{\circ} 33' 54.2''$
2 0/12	$\frac{1}{9}$, $\alpha_{12} = 3 + \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{2}}$ $\alpha_{12} = 80^{\circ} 58' 22.8''$	$1g \propto_{12} = 6, 29 45 56$ $2 \propto_{12} = 161^{\circ} 56' 45,6''$
2 Y12	Sen $Y_{12} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \times \sqrt{\left[2-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right]} \cdot \left[\frac{9+\sqrt{5}}{6} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right]$	Sen $Y_{12} = 0.97 39 55$ $2 Y_{12} = 153^{\circ} 47' 22.8''$
B ₁₂	sen $\beta_{12} = \left(1 - \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}\right)$: $\sqrt{\frac{9 + \sqrt{5}}{6}} - 2\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}$	sen $\beta_{12} = 0.385753$ $\beta_{12} = 22^{\circ}41'25.7''$
p	$\sqrt{\frac{9+\sqrt{5}}{6}-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}$ d_{12}	0, 53 23 24 ch ₁₂
9	$\sqrt{2-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}} Q_{12}$	0, 64 08 52 012
t	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ a_{12}	1, 15 47 01 012
S	$30 \times \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3} \times \sqrt{\frac{9 + \sqrt{5}}{6} - 2\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}} \times (a_{12})^2$	11, 39 67 02 (a ₁₂)
V	$\frac{2\sqrt{10(5-\sqrt{5})}}{3}(a_{12})^3$	3. 50 48 74(a/2)

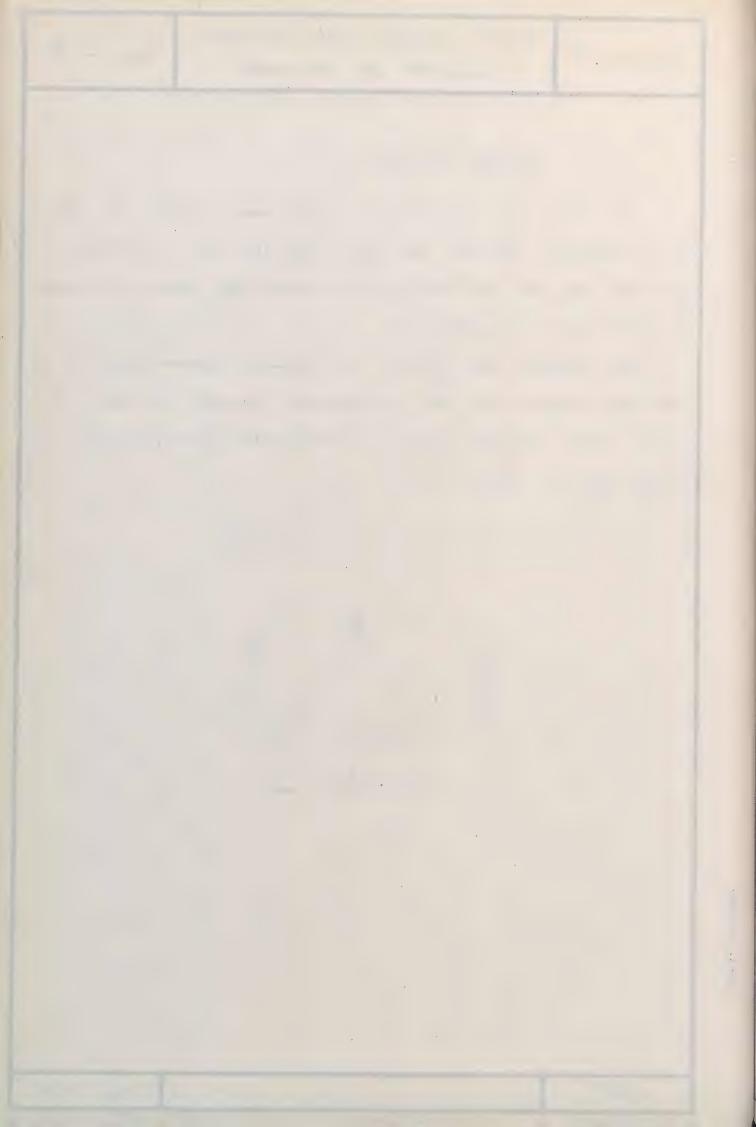


FIGURE SOCIECES

de tracing els section, de base $l_{12} = 29.3$ mm g allura p = 29.3 mm; me et tranques el sada 's bene el sala q = 35.2 mm (comprobación).

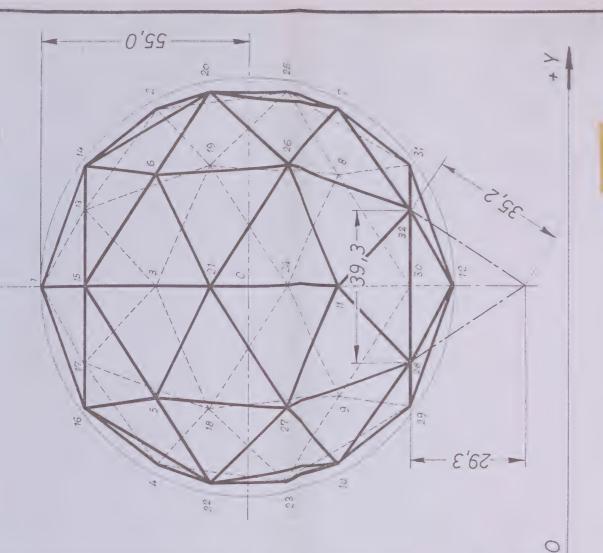
Taxa obteres en poliedro se formanan prevamente 12 pireaments acetas de base pentagonal regular de la do "la",
anyer cenas secrales son 5 tranquelos (ver figura), acoplados por su lado. "".







Z+



2'67

-50'02-

7'08-

52.1

ENUNCIADO

49,2-

54,0

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III,
el poliedro derivado de un dodecaedro
regular, obtenido al proyectar desde
el centro de la esfera circunscrita a
éste, y sobre ella, los centros de cada cara, uniendo a continuación estos puntos con los vértices del polígono de dicha cara.

153

Las coordenadas del centro de la esfera son: 0 (72, 72, 85) mm y el radio de la misma de 55 mm,

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

1+

-		1 (
Çalifi	cación	700
Propuesta De entrega Entregada		derivado
De en		adro
Propuesta		Poliedro

Fecha: Alumno. Escala

1:1

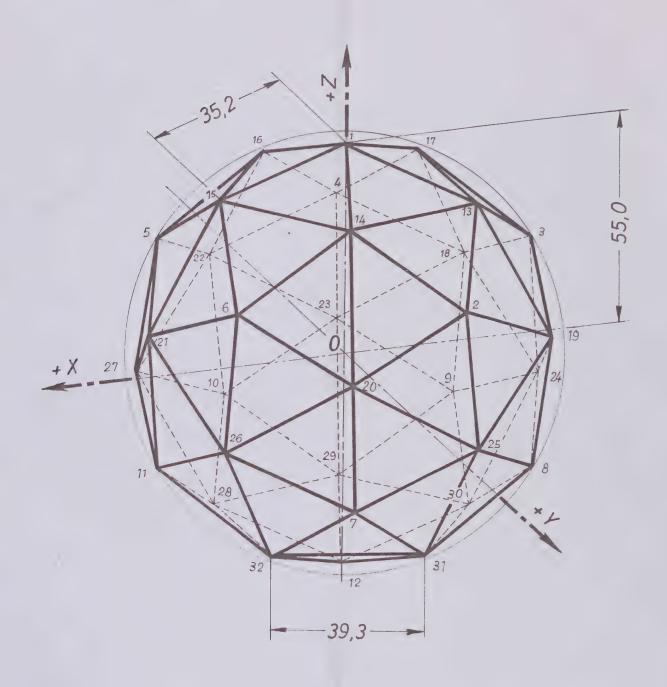
Escuela

(firma)

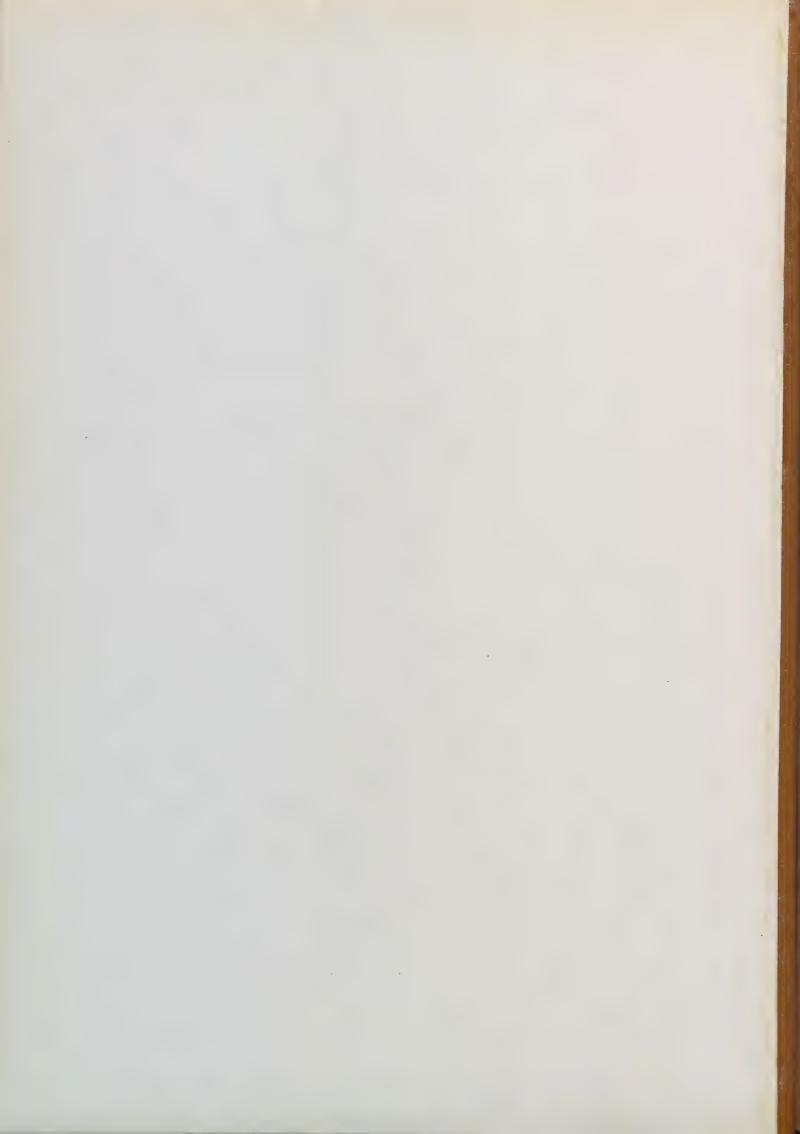
del dodecaedro regular Lámina 28

11





Poliedro derivado del dodecaedro regular



ENUNTUES

Representar por mitero qual conactico, en lo.

Manos I. II q III, el poliedro derivado de un iconor
dos aquelar, obtenido al proyectar desde el miso de la

esfera circumscrita a este, questa ella, la continua de

tar cara, uniendo a continuación estos unios de

tos vertices del poligono de dessa cara.

bas coordenadas del centro de la esfera, son:
0 (72, 72, 85) mm g el radio de la misma, de 55
mm.

Ditujar en formate A3V y a reale 11.1.

DATOS: 0 (72. 72. 85) mm $a_{20} = 55 \text{ mm}.$



Al estudiar el ejercicio propuesto en se invine es, hemos obterido unas deducciones previas de carácter general,
comunes a los cinco poliedos regulares.

bas formulas alli deducidas las aplicaremos succeivamente en este caso particulas del icosaedro regular. El
desarrollo del cálculo correspondiente a esta lámina, sequirá pues aquellas directrices, a las que haremos as
oportunas referencias.

PROCESO GRÁFICO

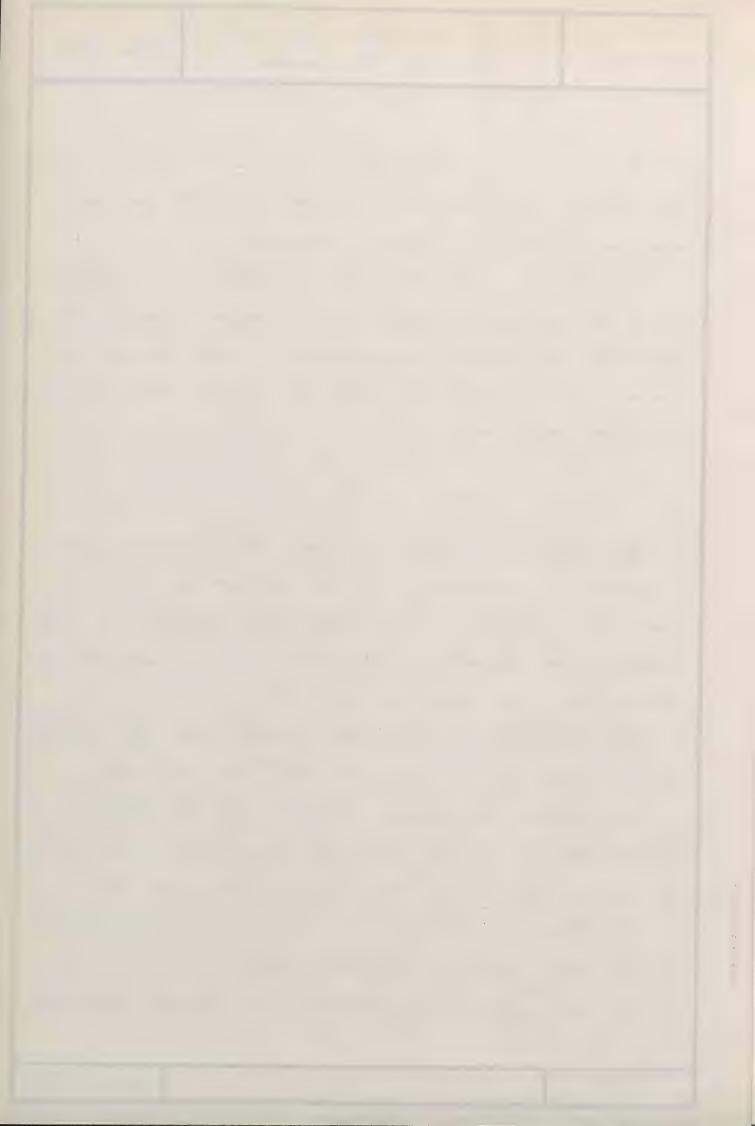
En el caso del priedro derivado del icosaedro regular, el proceso es insmediato, ya que nabemos que el cuipregado del icosaedro es un dodecardo regular, y esta
cepresentación ha sido ya realizada en el ejercicio de la
lámina 24, enyo proceso nos permite:

1º Representar el icosa edro regular dade. de vertices 1 al 12, inscrito en una esfera de 55 mm de radio.

2º Obtener los vértices 13 al 32 del dodecaedro conjurgado inscrito en la misma esfera (estos vértices es han de corresponder con los 21 al 40 de la lámina 24).

3º Unir les vertices 21 al 40 con les correspondientes de cada cara del icosaedro dado.

Al terminar la representación del poliedro derivado,



pide mos compribar que este ai un polisdos concaro, de

C = 3 x 20 = 60 earas (ver lam. 25, form. [1]); de

V = 20 + 12 = 32 vertices (ner lam. 25, form. [2]); 1 d

A = 30 + 3 × 20 = 90 aristas (ver lane. 25, forcon. [3]).

La demostración de la començadad de este poliedro la haremos analíticamente.

PROCESO GRÁFICO - ANALÍTICO

Calculemos previamente los requestros servicios de ducidos de espera anteriores, en funcion del media a 20 (dato) de la espera circumscrita.

Numero de caras "n" del icosaedro dado

n = 20

Radio "as " de la esfera circumerita al cuismo (dato del ejercicio).

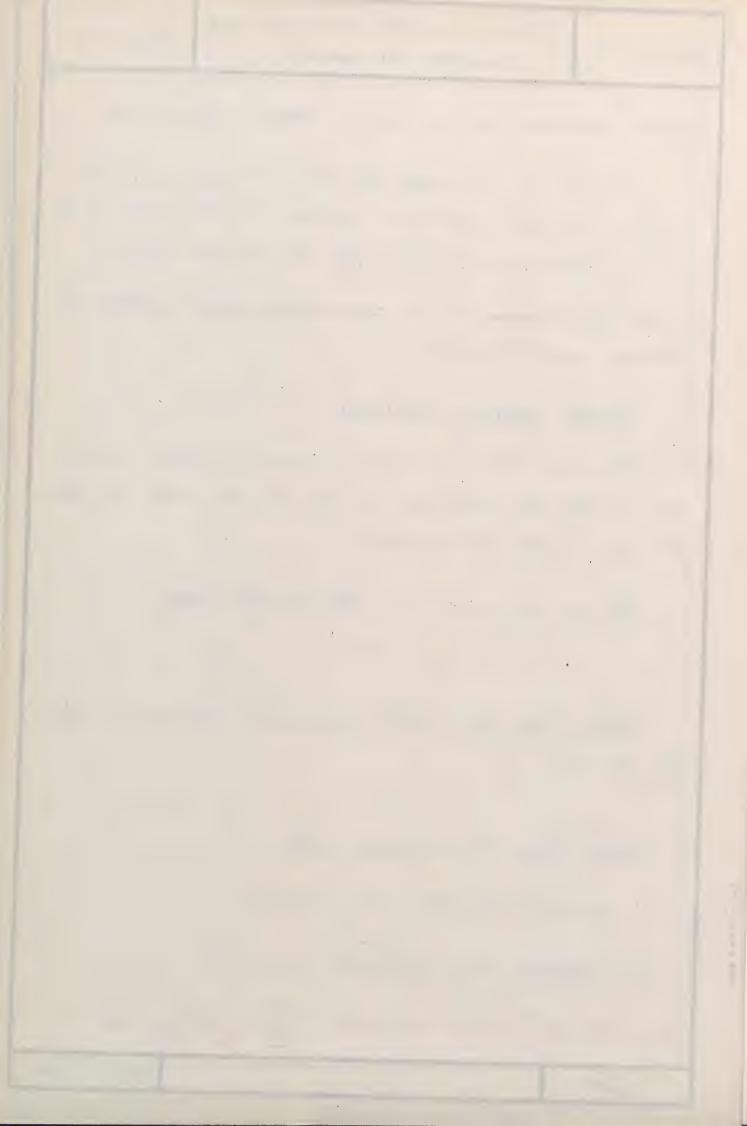
Lado "leo" del icosaedro dado

Je deduce de la form. 63, lan. 5

 $\ell_{20} = \frac{4}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \quad a_{20} = \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{5}} \quad a_{20}$

Desarrollo del cateulo auterior: | le = 4 | 10 + 2 V5

UNE A4 210 X



$$= \sqrt{\frac{16}{10+2\sqrt{5}}} \quad a_{20} = \sqrt{\frac{8}{5+\sqrt{5}}} \quad a_{20} = \sqrt{\frac{8(5-\sqrt{5})}{20}} \quad a_{20} = \sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{5}} \quad a_{20} = \sqrt{\frac{$$

$$=\sqrt{\frac{16-2\sqrt{5}}{5}} a_{20}$$

Radio "b," de la esfera tangente a las asistes del poliedro agular dado

Le déduce de la form. 44, lam. 5

$$b_1 = b_{20} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} l_{20} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \times \sqrt{\frac{2(5 - \sqrt{5})}{5}} a_{20} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} a_{20}$$

Desarrollo del calculo auterior:
$$\boxed{b_1} = \frac{1+15}{4} \times \sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{5}} a_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}{10\times5}} a_{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}{8\times5}} a_{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{20}} a_{20} = \sqrt{\frac{20}{3}} a_{20} = \sqrt{\frac{15-\sqrt{5}}{20}} a_{20} = \sqrt{\frac{15-\sqrt{5}}{20}$$

$$= \sqrt{\frac{15 - 3\sqrt{5} + 5\sqrt{5} - 5}{20}} \quad a_{20} = \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{20}} \quad a_{20} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} \quad a_{20}$$

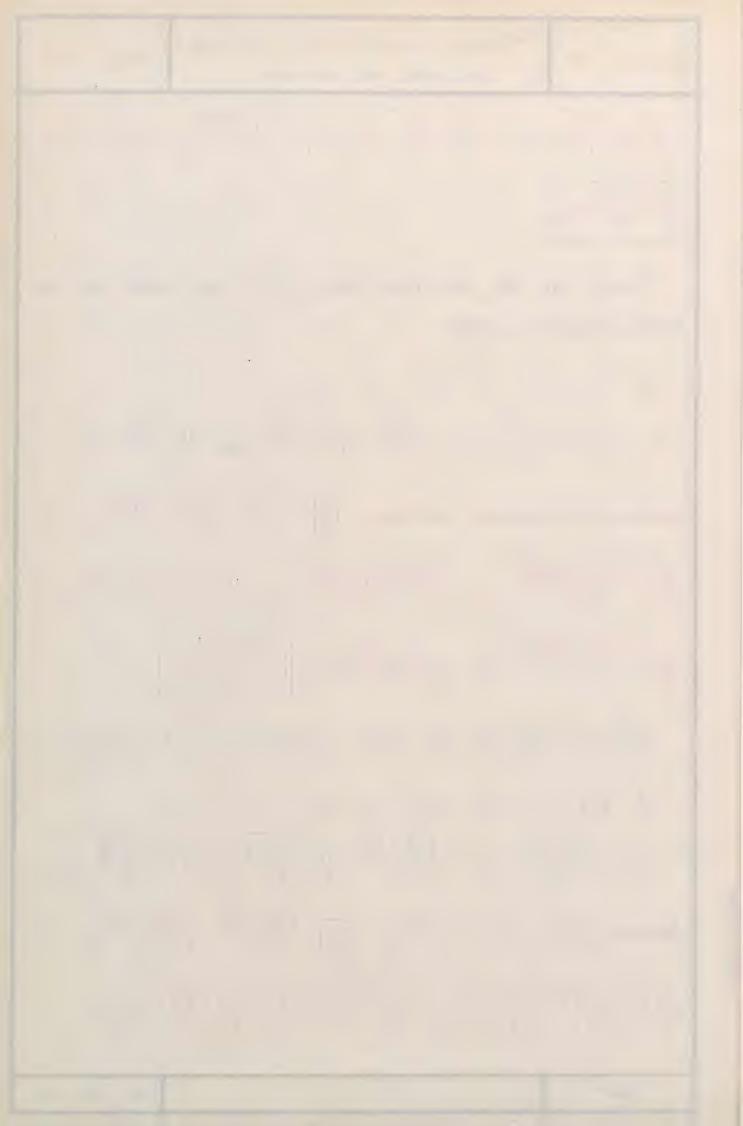
Padio "Ceo" de la esfora inscrita en el mismo

Le deduce de la foran. 45, lan. 5.

$$C_{20} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12} \ell_{20} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12} \times \sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{5}} \alpha_{20} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \alpha_{20}$$

Desarrollo del calculo anterior: (20) = 3 V3 + V15 (5-V5) a20 =

$$= \sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})(3\sqrt{3}+\sqrt{15})^2}{12\times12\times5}} a_{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(27+15+6\sqrt{45})}{6\times12\times5}} a_{20} =$$



Win e

$$= \sqrt{\frac{(5 \cdot \sqrt{5})(42 + 18\sqrt{5})}{6 \times 12 \times 5}} a_{20} = \sqrt{\frac{(5 - \sqrt{5})(7 + 3\sqrt{5})}{12 \times 5}} a_{20} = \sqrt{\frac{35 - 7\sqrt{5} + 15\sqrt{5} - 15}{12 \times 5}} a_{20}$$

$$= \sqrt{\frac{20 + 8\sqrt{5}}{12 \times 5}} a_{20} = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}} a_{20}$$

Radio "deo de la circumperencia circumsonità al poligorio reignia de una rara del mismo,

La detuci de la firm, 46, lan, 5

$$d_{20} = \frac{\sqrt{3}}{3} \ell_{20} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{5}} a_{20} = \sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{15}} a_{20} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}} a_{20}$$

Radio "keo de la circumferencia inscrita al poligono regular de una cara del mismo (apotema).

Le deduce de la foram. 53, lan. 5.

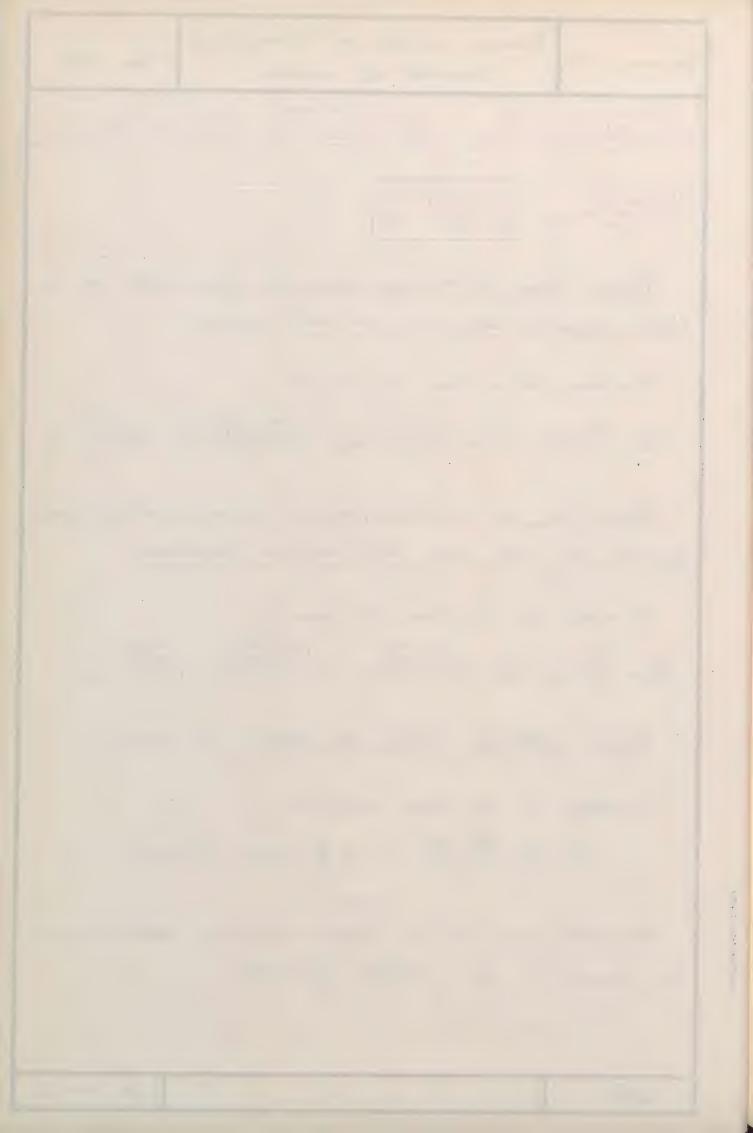
$$k_{20} = \frac{\sqrt{3}}{6} \ell_{20} = \frac{\sqrt{3}}{6} \times \sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{5}} a_{20} = \sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{12\times5}} a_{20} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{30}} a_{20}$$

Angulo rectilires 2 420" del diedro del mismo.

Le deduce de la foran. 47, lam. 5

$$2en \quad \varphi = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6}$$
 $2 \quad \varphi = 138^{\circ} \quad 11' \quad 22.8''$

Comando como base los valores anteriores, deduciremos los signientes del poliedro derivado



Angulo rectilines "l'es" del diedes formado por dos caras sutiquas del polados derevado, en una anta del insaedro.

Le deduce de la formula general [4] (ver lan. 25), sustitujendo en ella los valores particulares de este caso.

$$\frac{t_{9}}{t_{9}} \cdot \alpha_{20} = \frac{a_{20} k_{20}}{(k_{20})^{2} - a_{20} c_{20} + (c_{20})^{2}} = \frac{a_{20} k_{20}}{\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{30} a_{20}}} - a_{20} \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15} a_{20}} + \sqrt{\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15} a_{20}}}$$

$$= -\frac{\sqrt{6(5-\sqrt{5})} + 2\sqrt{5}}{2}$$

Desarrollo del calculo auterior:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{30}}} = \frac{a_{20}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{30}} \cdot a_{20}}{\left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{30}} a_{20}\right)^2 - a_{20}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \cdot a_{20} + \left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} a_{20}\right)^2}$$

$$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{30} \qquad \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{30}}$$

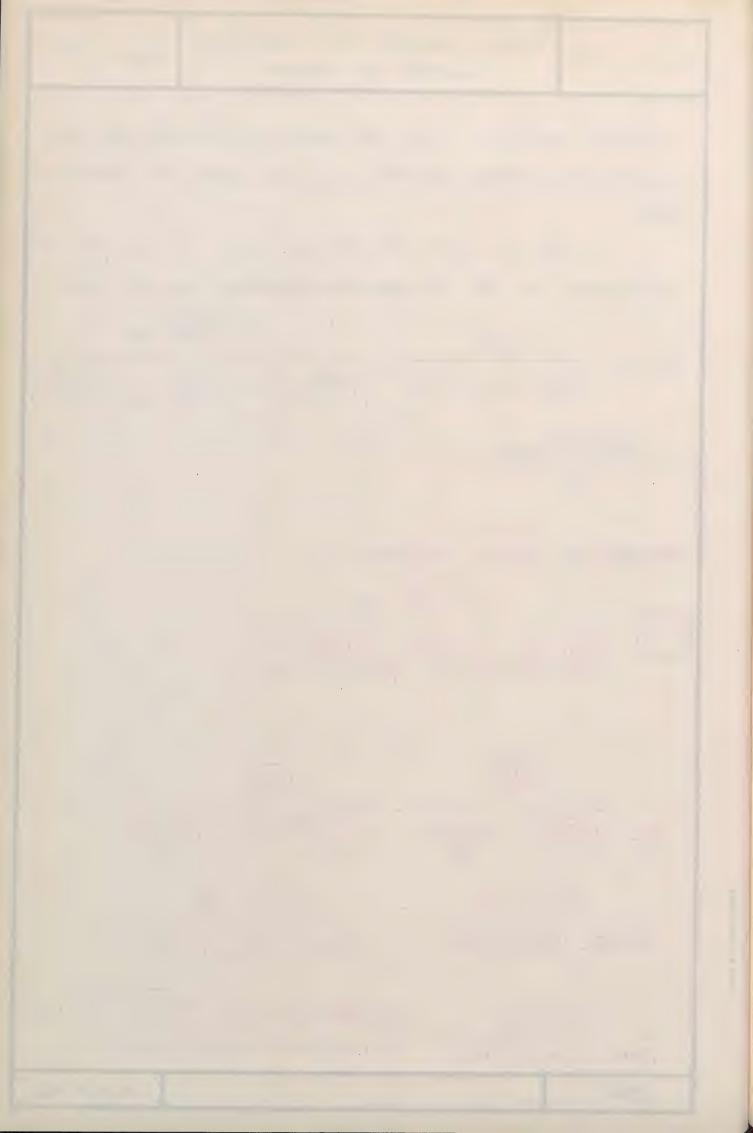
$$\frac{5-\sqrt{5}}{30} - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} + \frac{5+2\sqrt{5}}{15} \qquad \frac{5-\sqrt{5}+70+4\sqrt{5}}{30} - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}$$

$$\sqrt{30(5-\sqrt{5})} = \sqrt{30(5-\sqrt{5})}$$

$$= \sqrt{30(5-\sqrt{5})}$$

$$= 3(5+\sqrt{5}) - \sqrt{60(5+2\sqrt{5})}$$

$$\frac{\sqrt{30(5-\sqrt{5})}}{3(5+\sqrt{5})...2\sqrt{15(5+2\sqrt{5})}} = \frac{\sqrt{30(5-\sqrt{5})} \times \left[3(5+\sqrt{5})+2\sqrt{15(5+2\sqrt{5})}\right]}{9\times(25+5+10\sqrt{5})...4\times15\times(5+2\sqrt{5})}$$



20 - 7 - 72

CES

Derivado del iconocteo 3 \30 (5-Vs) (5+Vs)2 + 2 \30 x 15 - (5-Vs) (5+2 Vs) 270 +90 V5- 300 - 120 V5 3 V30 (25-5) (5+V5) + 2×15 V2 (25-5 V5 + 10 V5-10) - 30 V5 - 30 3 /30 x 20 x (5 + UF) + 30 /2 (15 + 5 UF) 3xi0 /6 (5+UF) + 30 /10 (3+UF) 30 (V5+1) - (30 V5 +30) V6 (5+V5) + V10 (3+V5) V6 (5+V5) (V5-1)2 + V10 (3+V5) (V5-1)2 1/5 +1 V6 (5+VF) (6-2VF) + V10 (3+VF) (6-2VF) $2\sqrt{3}(s+\sqrt{s})(3-\sqrt{s}) + 2\sqrt{5}(3+\sqrt{s})(3-\sqrt{s})$ $\sqrt{3}(15+3\sqrt{5}-5\sqrt{5}-5)+\sqrt{5}(9-5)$ $\sqrt{3}(10-2\sqrt{5})+2\sqrt{5}$ = - V6 (5-V5) + 2 V5 El valor mumicico de «20 en grados rexagesimales, sera

E 5 = 4,27 22 15 8

lg tg S= lg. 4, 27 02 15 8 = 0,6306 532

δ = 76° 49' 33,3" $κ_{20} = 180^{\circ} - 76^{\circ}$ 49' 33,3" = 103° 10' 26,7"

7 2 0 = 206 20' 53,4"

El valor de «20 > 90° mos demuestra la concavidad del poliedio decivado (rer lain. 25 "Consideraciones previas").

Altura "P" de una cara lateral de la piramide recta formada en cada cara del icosaedro dado (cara del po-liedro derivado).

Le deduce de la formula general [5] (ver lan. 25). sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

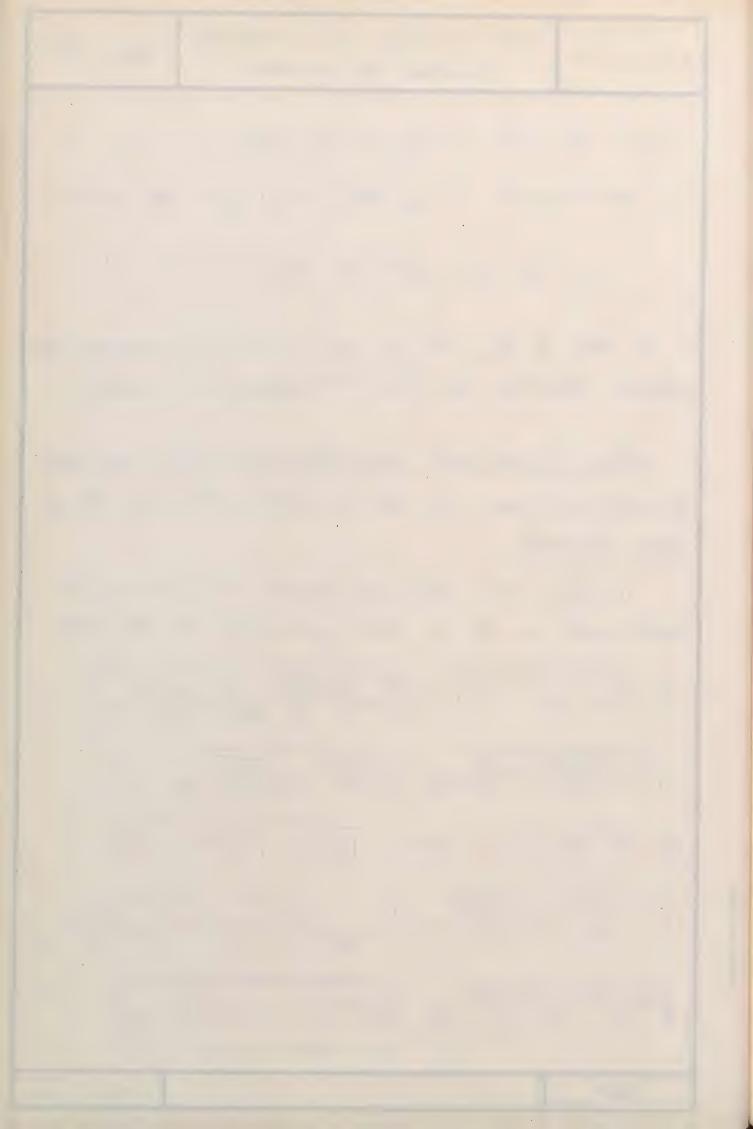
$$p = \sqrt{(a_{20} - c_{20})^2 + (k_{20})^2} = \sqrt{\left[a_{20} - \left(\sqrt{\frac{5+3\sqrt{5}}{15}} a_{20}\right)\right]^2 + \left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{30}} a_{20}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(1 - \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}\right)^2 + \frac{5 - \sqrt{5}}{30}} \times a_{20} = \sqrt{\frac{15 + \sqrt{5}}{10}} - 2\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}} a_{20}$$

iesarrollo del calculo auterin: [p=\((1-\frac{5+2\sqrt{5}}{15}\)^2 + \frac{5-\sqrt{5}}{30} aze

$$= \sqrt{1 + \frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}} - 2\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}} + \frac{5 - \sqrt{5}}{30} = \sqrt{\frac{30 + 10 + 4\sqrt{5} + 5 - \sqrt{5}}{30}} - 2\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}} = \frac{30}{30}$$

$$= \sqrt{\frac{45 + 3\sqrt{5}}{36}} - 2\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}} = 2\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15$$



VE A4 210 X 297

daista latural "q" de la piramide acta regular, o la dos ignal del triangulo isosceles de ma cara del primio derivado.

Le déduce de la sor me general [6] (ver lan, 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este aso.

$$9 = \sqrt{(a_{20} - C_{20})^2 + (d_{20})^2} = \sqrt{\left[a_{20} - \left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} a_{20}\right)\right]^2 + \left(\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}} a_{20}\right)^2} =$$

$$=\sqrt{\left(1-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)^2+\frac{10-2\sqrt{5}}{15}} \quad a_2=\sqrt{2-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}} \quad a_{20}$$

Desarrollo del calculo auterior: $9 - \sqrt{\left[a_{20} - \left(\sqrt{\frac{5+265}{15}} a_{26}\right)\right]^2 + \left(\sqrt{\frac{10-285}{15}} a_{20}\right)^2} =$

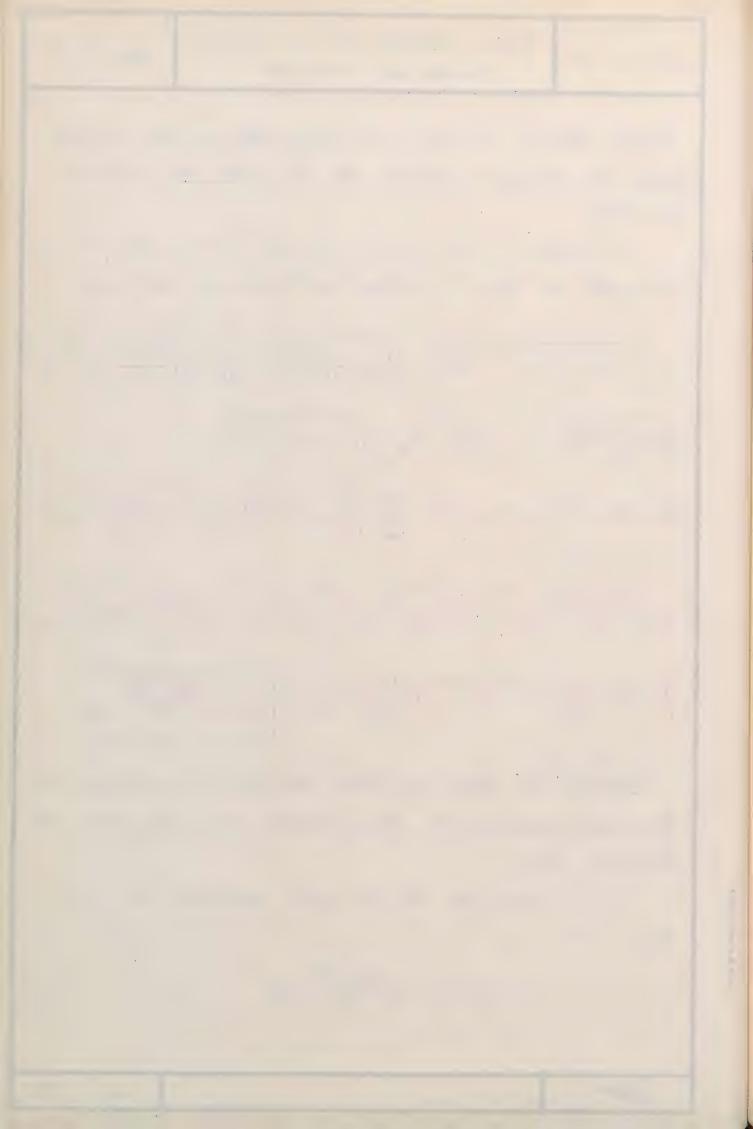
$$= \sqrt{\left(1 - \sqrt{\frac{5+215}{15}}\right)^2 \left(a_{20}\right)^2 + \frac{10-215}{15} \left(a_{20}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{5+215}{15}} - 2\sqrt{\frac{5+215}{15}} + \frac{10-215}{15} a_{20}$$

$$= \sqrt{\frac{15+5+2\sqrt{5}+10-2\sqrt{5}}{15}} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} = \sqrt{2-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}} = \sqrt{2-2\sqrt{5}} =$$

dos lados consecutivos del poligono de una cara del icos a edro dado.

Es el tercer lado del triangulo equilatero de una

$$t = \ell_{20} = \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{5}} \ a_{20}$$



Augulo rectilines del diedro "2 Y20" formado por dos caras laterales contiguas en las austes de la piramide recta.

Je deduce de la formula general [7] (ver lam. 25), eustituyends en ella les valores particulares de este easo

sen
$$V_{20} = \frac{t q}{2 l_{20} p} = \frac{t q}{2 l_{20} p} = \frac{1}{2} \times \frac{q}{p} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{15 + 15}} = \frac{1}{20}$$

= 0.64 08 51 8 -- 0.64 08 51 8 -- 0.87 43 65 7 -- 2 × 0.36 64 66 7 -- 0.73 29 33 4...

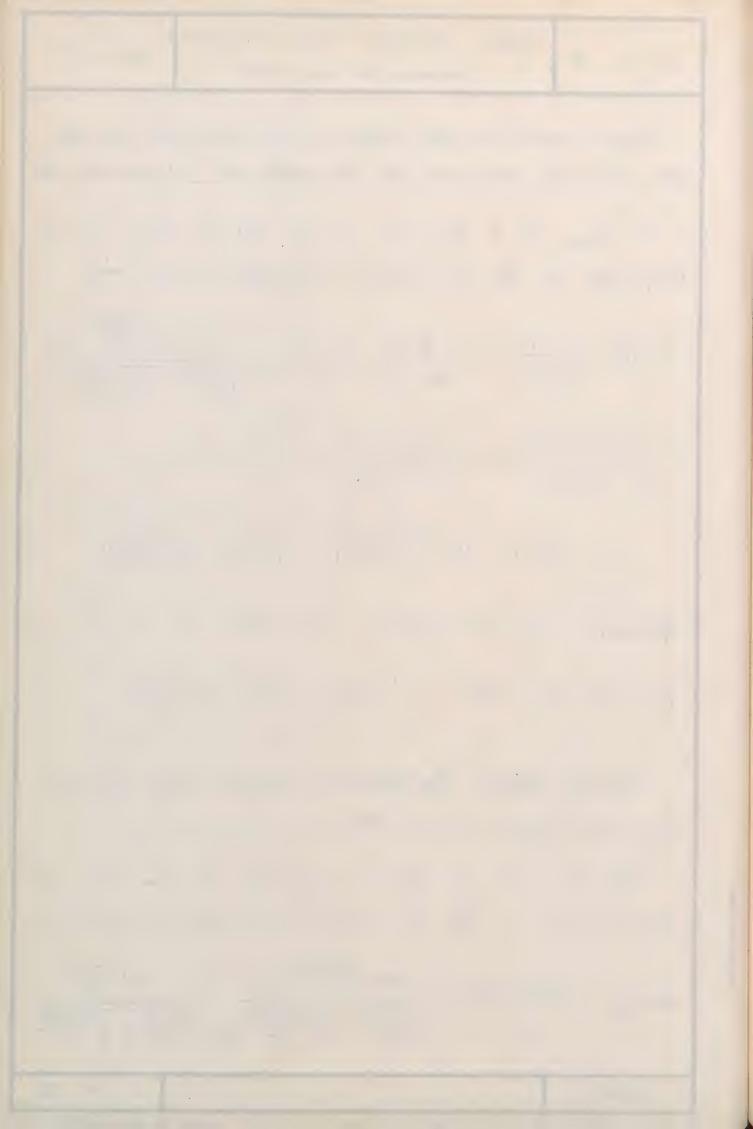
lg sen Y20 = lg 0,87 43 657 = 1,9416 931

$$Y_{20} = 60^{\circ} 58' 12,0"$$
 $2Y_{20} = 121^{\circ} 56' 24,0"$

Angulo decdro "Bro" formado por una cara lateral de la piramide y su bare.

Le deduce de la formule general [8] (ver lan. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso

$$Au \beta_{20} = \frac{a_{20} - C_{20}}{\beta} \qquad \frac{a_{20} - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} a_{20}}{\sqrt{\frac{15+\sqrt{5}}{10} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}} a_{20}} \sqrt{\frac{15+\sqrt{5}}{10} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}$$



El valor numérico de Bro, se obtiene a continuación:

descents vorigies a como com probacco (nel fo.m. [11], lan. 25)

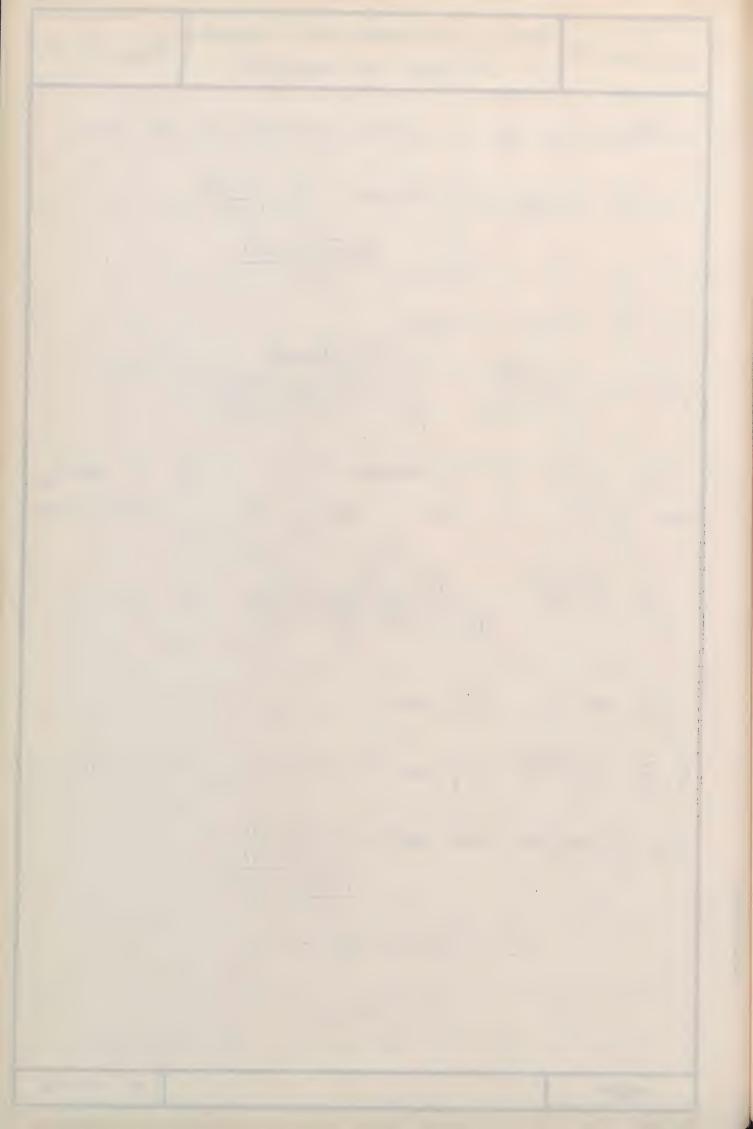
valor coincidente con el ja obternia en este estudio.

Padro "b_" de la esfera tangente a las aristas latereales de las peramides rectas cuyas bases seu caras del mosardro regular dado.

Le deduce de la formula general [9] (vei lam. 25), sustituyendo en ella la valores particulares de este caso.

$$b_2 = \sqrt{(a_{20})^2 - \frac{9^2}{4}} = \sqrt{1 - (2 - 2\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}})} : 4 \quad a_{20} = \sqrt{1 + \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}} : 2 \cdot a_{20}$$

Fradio "C," de la espera inscrita en el poliedro derivado Le de duce de la formula general [10] (ver lam. 25)



that comments of all a present deducin, some comprehense, de la formula equivalente [10"] (ver line, 25), en la qui

curs va : numerico es

C, = 0, 94 72 73 6 ... × sen 60° 58' 12,0" × 920 = 0, 94 72 73 6 ... ×

x 0,87 43 65 7 .. x a20 = 0, 82 82 63 5 a20

valor coincidente con el qui obternido anteriormente, y por lo tanto:

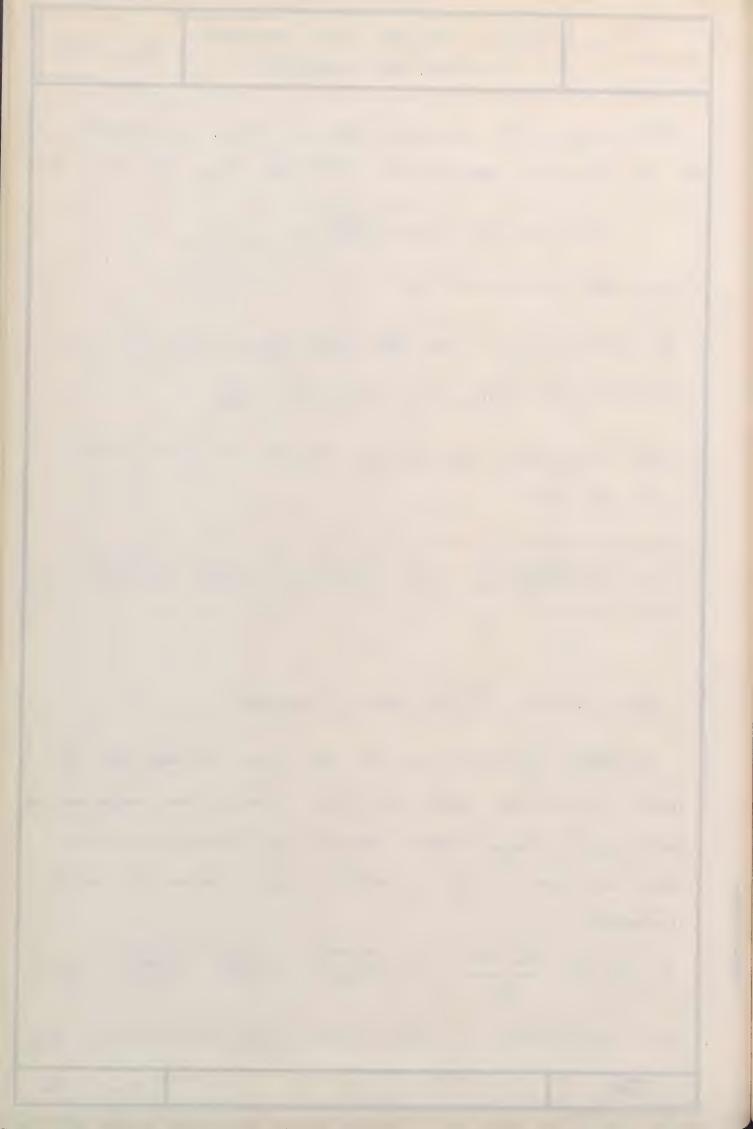
$$C_{1} = \sqrt{\left(1 + \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}\right)} : 2 \times \sqrt{\left[2 - 2\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}\right]} : \left[4 \times \left(\frac{45 + \sqrt{5}}{10} - 2\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}\right)\right] \times a_{20}}$$

Area lateral "5" del poliedro derivado

$$S = 20 \times 3 \times \frac{t_{20} \times p}{2} = 30 \times \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{5}} \times \sqrt{\frac{15 + \sqrt{5}}{10}} - 2\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}} \times (a_{20})^2$$

= 30 × 1, 05 14 62 2 -.. × 0, 36 64 66 7.. $(a_{20})^2 = 11, 55 97 76 5 - (a_{20})^2$





Tolumer V' del presido del sos

de las verts pràvios formades un sus mod.

siendo "S3" el area de una cara del icosaedro, y "h" la al-

Tina Atres Veo en función de azo, ver la se. E. tirmes

$$V_{20} = \frac{15 + 5\sqrt{5}}{12} \left(e_{20} \right)^{2} = \frac{15 + 5\sqrt{5}}{12} \times \left(\sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{5}} a_{20} \right)^{2} = \frac{\sqrt{8(5 + 15)}}{3} \left(a_{20} \right)^{3}$$

Desarrollo del calculo anterior: $V_{20} = \frac{15+5\sqrt{5}}{12} \times \left(\sqrt{\frac{N-2\sqrt{5}}{5}}\right)^3 \left(a_{20}\right)^3$

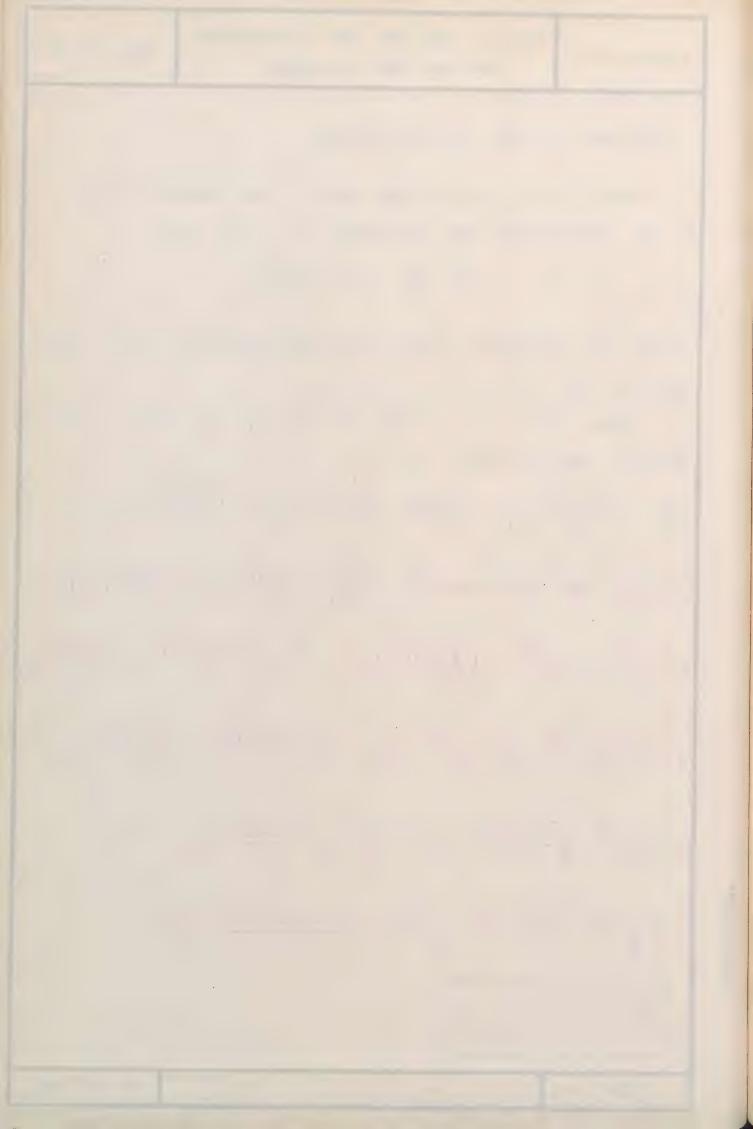
$$= \frac{15 + 5\sqrt{5}}{12} \times \frac{10 - 2\sqrt{5}}{5} \times \sqrt{\frac{2(5 - \sqrt{5})}{5}} \left(a_{20}\right)^{3} = \frac{\left(15 + 5\sqrt{5}\right)\left(10 - 2\sqrt{5}\right)}{5 \times 12} \times \sqrt{\frac{2(5 - \sqrt{5})}{5}} \left(a_{20}\right)^{3}$$

$$= \frac{(3 + \sqrt{5})(5 - \sqrt{5})}{6} \times \sqrt{\frac{2(5 - \sqrt{5})}{5}} \times (a_{20})^{3} = \frac{15 + 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5} - 5}{6} \sqrt{\frac{2(5 - \sqrt{5})}{5}} (a_{20})^{3} =$$

$$= \frac{10+2\sqrt{5}}{6} \sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{5}} \left(a_{20}\right)^{3} = \frac{5+\sqrt{5}}{3} \sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{5}} \left(a_{20}\right)^{3} =$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})^2}{5}(a_{20})^2}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2\times20\times(5+\sqrt{5})}{5}(a_{20})^3}=$$

$$=\frac{\sqrt{8(5+\sqrt{5})}}{3}(a_{20})^{2}$$



Ignalmente "h" en fancier de " a_{20} ". Variando $h = (a_{30} - c_{30}) = (1 - \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}})$

Johns 43 g 54, lane. 5)

 $S_{3} = \frac{5\sqrt{3}}{20} \left(\ell_{20}\right)^{2} = \frac{5\sqrt{3}}{20} \times \left(\frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} a_{20}\right)^{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{16}{10+2\sqrt{5}} \left(a_{20}\right)^{2} = \frac{5\sqrt{3}}{4} \times \frac{16}{10+2\sqrt{5}} \left(a_{20}\right)^{2} = \frac{16}{4} \times \frac{16$

 $= \frac{2\sqrt{3}}{5+\sqrt{5}} \left(a_{20}\right)^2 = \frac{2\left(5-\sqrt{5}\right)\sqrt{3}}{20} \left(a_{20}\right)^2 = \frac{5\sqrt{3}-\sqrt{15}}{10} \left(a_{20}\right)^2$

Lustiturgendo los valores de V20, h ? 53 en la yor-

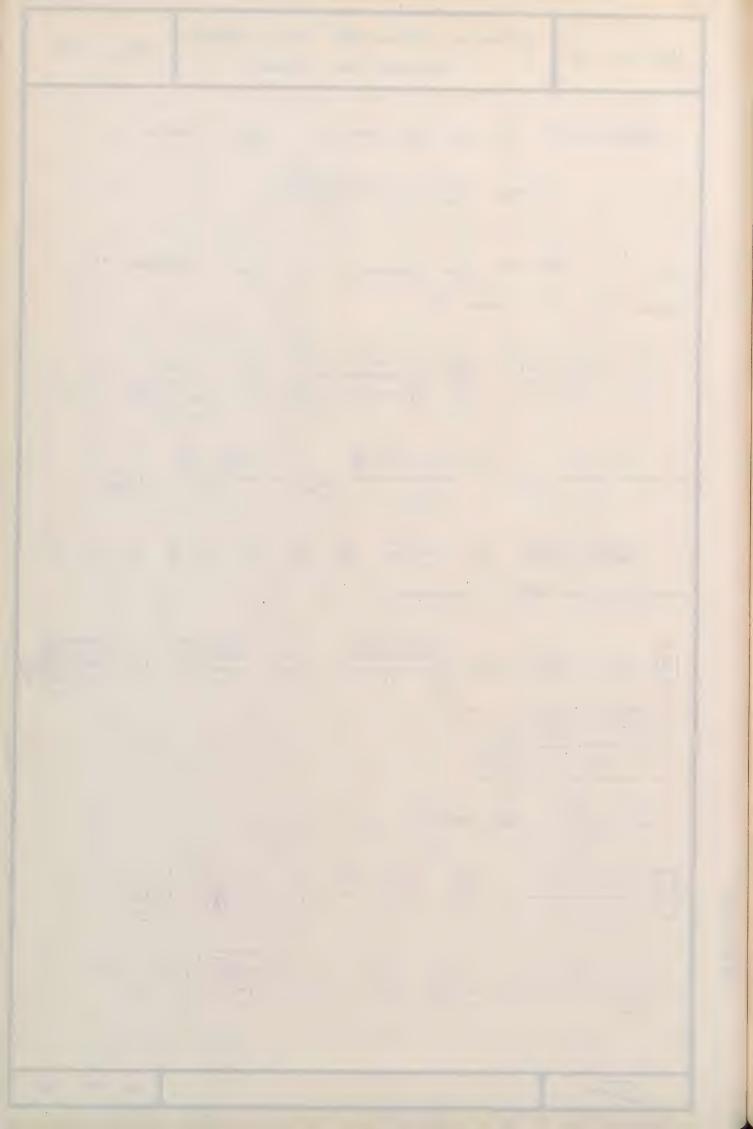
 $\boxed{V = V_{20} + \frac{20}{3} \times S_3 + h = \boxed{\frac{\sqrt{8}(5 + \sqrt{5})}{3} + \frac{20}{3} \times \frac{5\sqrt{3} - \sqrt{15}}{10} \times \left(1 - \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}\right) \left(a_{24}\right)}$

 $= \frac{10 \sqrt{3} - 2\sqrt{15}}{3} \left(a_{20}\right)^{3}$

Desarrollo del cateulo auterior:

 $V = \left[\frac{\sqrt{8}(5 + \sqrt{5})}{3} + \frac{20}{3} \times \frac{5\sqrt{3} - \sqrt{15}}{10} \times \left(1 - \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}} \right) \right] \left(a_{20} \right)^3 =$

 $=\frac{1}{3}\left[\sqrt{8(5+\sqrt{5})}+2(5\sqrt{3}-\sqrt{15})\times\left(1-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)\right]\left(a_{2c}\right)^{\frac{3}{2}}$



$$= \frac{1}{3} \left[\sqrt{8(5+\sqrt{5})} + (10\sqrt{3} - 2\sqrt{15}) - 2(5\sqrt{3} - \sqrt{15}) \times \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \right] (a_{10})^{3} =$$

$$=\frac{1}{3}\left[\sqrt{8(5+\sqrt{5})+(10\sqrt{3}-2\sqrt{15})}-2\sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(5\sqrt{3}-\sqrt{15})^2}{15}}\right]\left(a_{20}\right)^3=$$

$$=\frac{1}{3}\left[\sqrt{8(5+\sqrt{5})}+(10\sqrt{3}-2\sqrt{15})-2\sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(75+15-10\sqrt{45})}{15}}\right]\left(a_{22}\right)^{3}=$$

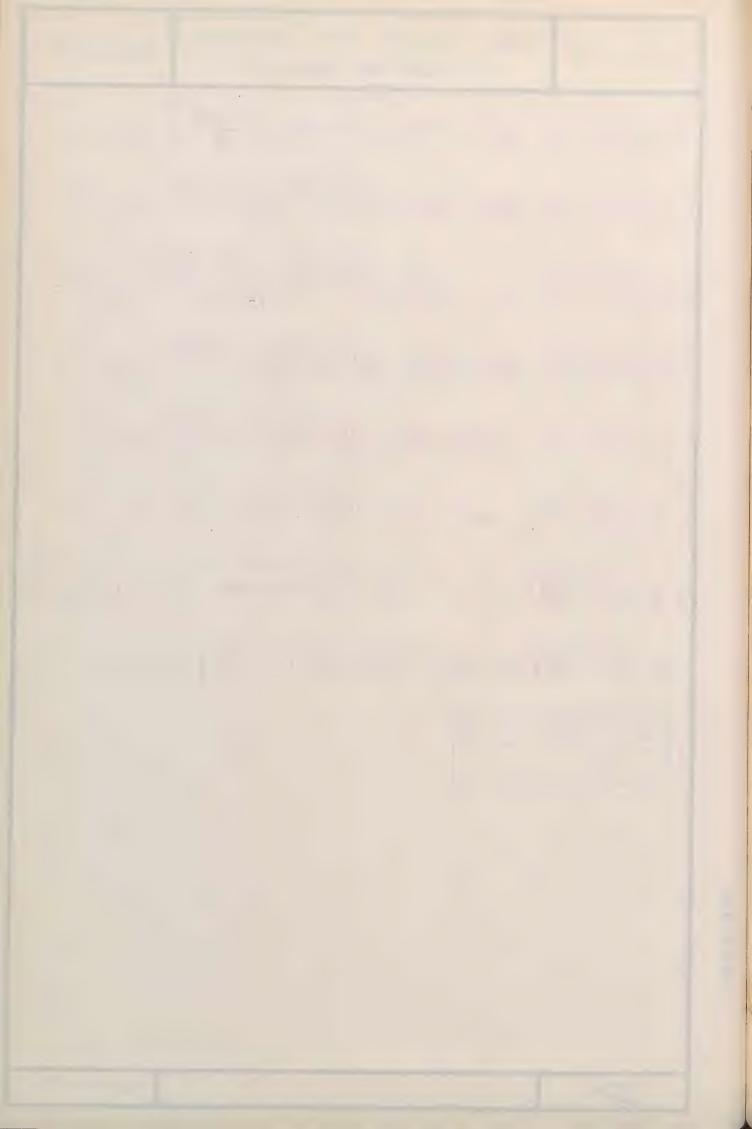
$$=\frac{1}{3}\left[\sqrt{8(5+\sqrt{5})}+\left(10\sqrt{3}-2\sqrt{15}\right)-2\sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(90-30\sqrt{5})}{15}}\right]\left(a_{20}\right)^{3}=$$

$$=\frac{1}{3}\left[\sqrt{8(5+\sqrt{5})}+\left(10\sqrt{3}-2\sqrt{15}\right)-\sqrt{8(5+2\sqrt{5})}\left(3-\sqrt{5}\right)\right]\left(\alpha_{20}\right)^{3}=$$

$$=\frac{1}{3}\left[\sqrt{8(5+\sqrt{5})}+(10\sqrt{3}-2\sqrt{15})-\sqrt{8(15+6\sqrt{5}-5\sqrt{5}-10)}\right]\left(a_{21}\right)^{3}=$$

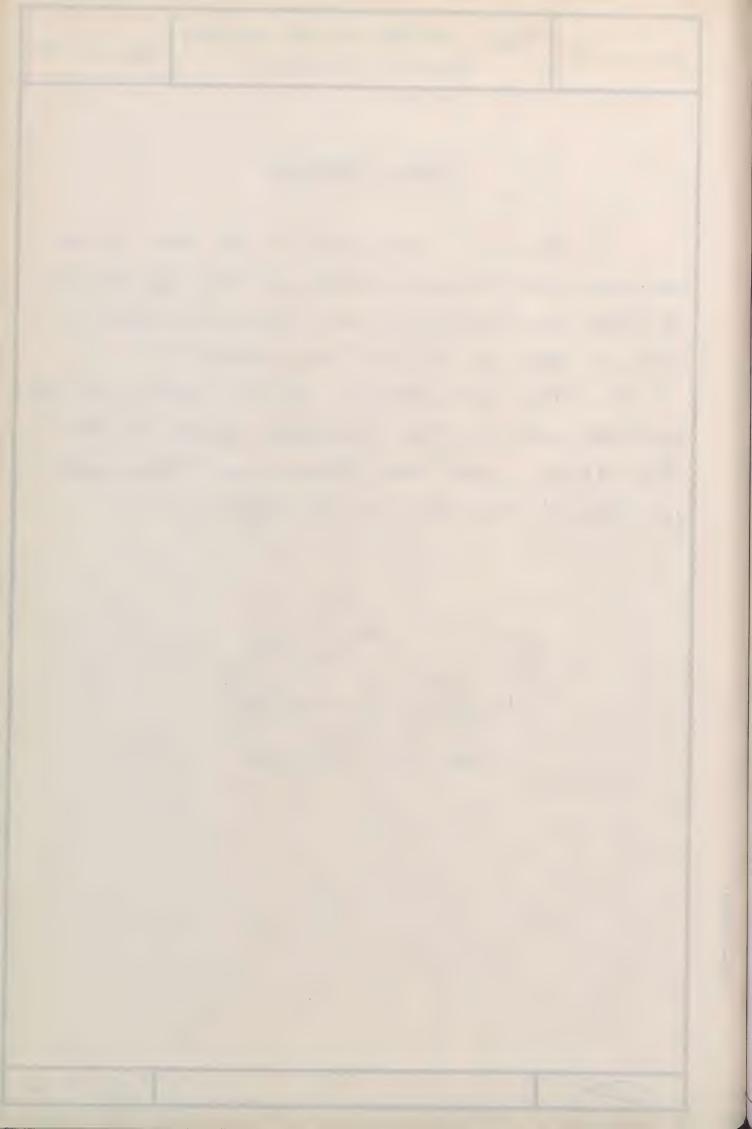
$$=\frac{1}{3}\left[\sqrt{8(5+\sqrt{5})}+(10\sqrt{3}-2\sqrt{15})-\sqrt{8(5+\sqrt{5})}\right]\left(a_{20}\right)^{3}=$$

$$= \frac{10 \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{15}}{3} \left(a_{20}\right)^3$$



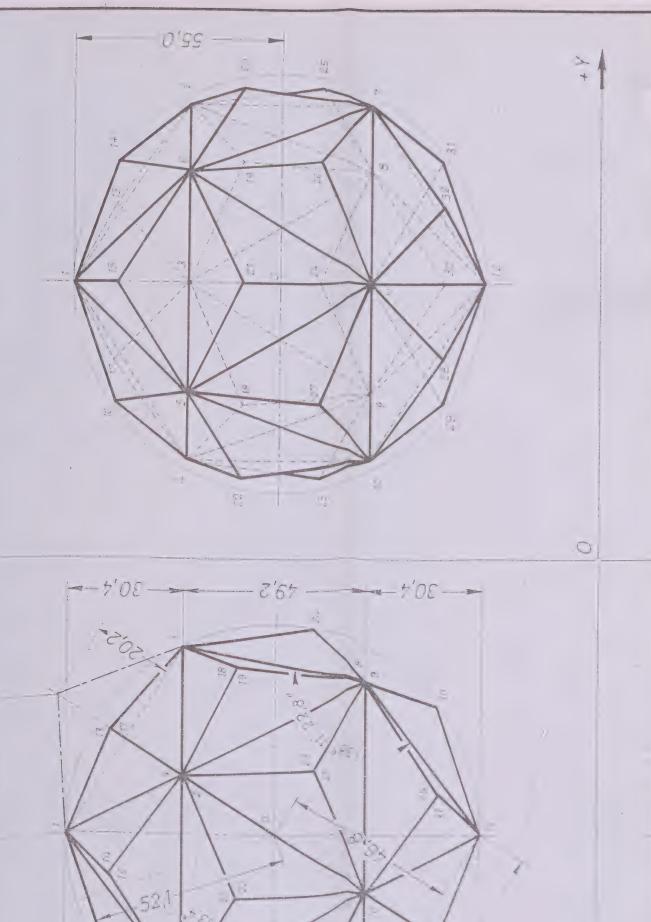
En el cuadro sinóptico que damos a continuación, ""
suminos los resultados anteriores:

Magnitud	Valor exacto	Valur decimal aproximado	
£20	$\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}} Q_{20}$	1. 05 14 62a ₂₀	
<i>b</i> ,	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} a_{20}$	0. 85 06 51 020	
b ₂	$\sqrt{\left(1+\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)}$; 2 d_{20}	0, 94 72 74 920	
C ₂₀	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}$ a_{20}	0, 79 46 55 020	
C1 <	$ \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \left[\sqrt{6(5-\sqrt{5})} + 2\sqrt{5} \right] : 2\sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{6}(5-\sqrt{5}) + 2\sqrt{5}}{2} \right)^2} q_{20} $ $ \sqrt{\left(1+\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right) : 2} \times \sqrt{\left[2-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right] : \left[4\times\left(\frac{15+\sqrt{5}}{10}-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)\right]} q_{20} $	0, 82 82 64 a ₂₀	
d ₂₀	$\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}$ O_{20}	0,60 70 62 020	
k20	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{30}} \qquad a_{20}$	0, 30 35 31 020	
2 420	sen $\psi_{20} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6}$ $\psi_{20} = 69^{\circ} 5' 41.4''$	sen 40 = 0.93 41 72 2420 = 138° 17' 22.8"	
20	$t_{\overline{9}} \bowtie_{20} = -\frac{\sqrt{6(5-\sqrt{5})} + 2\sqrt{5}}{2} \bowtie_{20} = 103^{\circ} / 0' 26.7''$	\$ \(\alpha_{20} = -4, 27 22 16\) 2 \(\alpha_{20} = 206^{\circ} 20' 53.4'' \)	
2 Y20	$(20) Y_{20} = \sqrt{\left[2 - 2\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}\right] \cdot \left[4 \cdot \left(\frac{15 + \sqrt{5}}{10} - 2\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}\right)\right]}$	$Sen Y_{20} = 0.87 \ 43 \ 66.$ $2 Y_{20} = 121^{\circ} \ 56' \ 24.0''$	
B20	sen $\beta_{20} = \left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right) : \sqrt{\frac{15+\sqrt{5}}{10}} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}$	sen $\beta_{20} = 0.56 \ 03 \ 39$ $\beta_{20} = 69^{\circ} \ 5' \ 47.4''$	
P	$\sqrt{\frac{15+\sqrt{5}}{10}-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}$ Q_{20}	0, 36 64 68 020	
9	$\sqrt{2-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}$ Q_{20}	0, 64 08 52	
t	$\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}$ Q_{20}	1, 05 14 62920 11, 55 97 77 $(a_{20})^2$ 3, 19 15 14 $(a_{20})^3$	
S	$30\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}} \times \sqrt{\frac{15+\sqrt{5}}{10}-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}} (a_{20})^2$	11, 55 97 77 (020)2	
V	$\frac{10 \sqrt{3} - 2 \sqrt{15}}{3} \left(a_{20}\right)^3$	3, 19 15 14 (20)	



Z+

35,2



-111- -334- -111-

ENUNCIADO

Representar por el método gráfi-co-analítico, en los planos I, II y III, políel poliedro derivado de un icosaedro el centro de la esfera circunscrita a éste, y sobre ella, los centros de cada cara, uniendo a continuación esregular, obtenido al proyectar desde puntos con los vértices del gono de cada cara. 105

de la y el Las coordenadas del centro 55 mm. esfera, son: 0 (72, 72, 85) mm radio de la misma, de

a es-A3v y Dibujar en formato cala 1:1.

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

12 32 0 13 al Proyecciones centros caras del mismo (vértices del dodecaedro conjugado)... cosaedro regular____

1 +

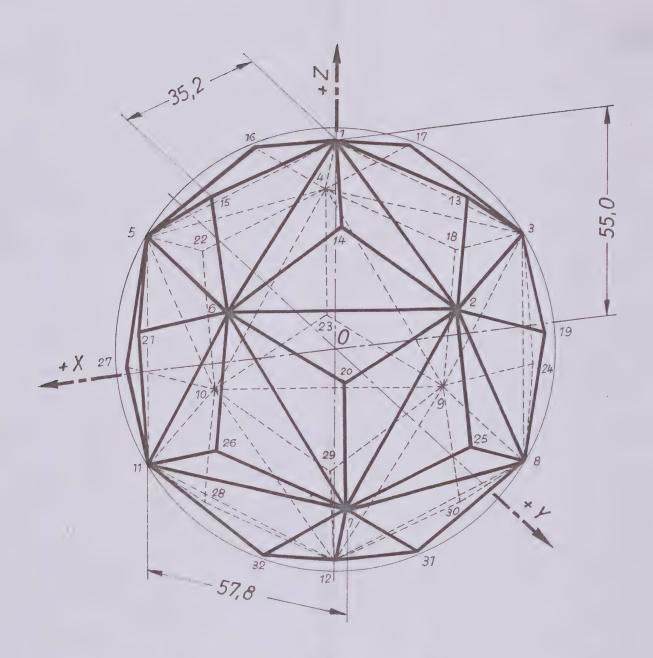
		(fir)			
	Califi-	cación			0			
	ropuesta De entrega Entregada (Poliedro derivado de			
AND DESIGNATION OF THE PARTY OF	Propue							
Commence of the Commence of th		Fecha:	Alumno:	Escala				

Escuela Curso

icosaedro regular

Lámina





Poliedro derivado del icosaedro regular



ENCIALCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I. II, II, el poliedro derivado de un tetraedro conjugado por sus aristas, mando se unen consecutivamente los extremos de dos aristas correspondientes en ambos.

dro dado, es de 55 mm, 7 las coordenadas de su centro 0 son: 0 (72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3V 1 a escala 1:1

DATOS

0 (72, 72, 85) mm.

JNE A4 210 X 297



Obein no 1

TETRA EDRO - TETRA EDRO

CONSIDERACIONES PREVIAS

En las laminas 11 a 18 hemos estudiado los poliedros regulares convescos conjugados obtenidos al trasar

por los puntos medios de las aristas de un poliedio requelas dado, rectas perpendiculares al plano determinado por dichas aristas o el centro de aguél.

En la làmina 11º obturinos el conjugado del tetraedro regular convesco, que es otro tetraedro.

En la 13: el del exaedro, que es un octaedro.

En la 14° el del octaedro, que es un escaedro.

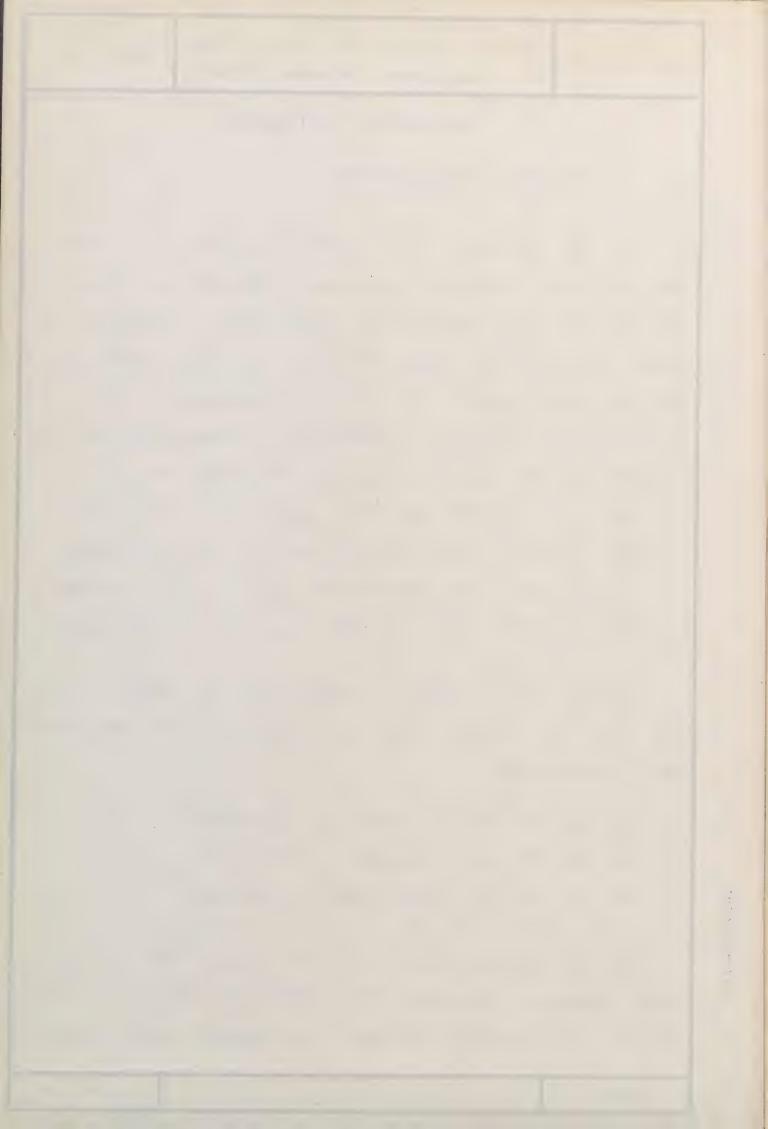
En la 16° el del dodecaedre, que es un icosaedre, y

En la 17° el del icosaldro, que es un dodecardro.

For otra parte, hemos representado los cólidos comenmes que se forman por la intersección de dos poliedes conjugados.

En la 12° de tetraedro q tetraedro En la 15° de escaedro q octaedro, y En la 18° de dodecaedro e icosaedro

En la representación de estas tres niltimas lámimas, podemos observas que cada dos aristas correspondientes de ambos poliedros conjugados, son coplana-



visit q as cortan perpendiculamente su sur per se mediss; por consigniente al unix succeivamente la extremos de dichas aristas obtenemos un audiciais simo, cuyas diagonales son les occucionades aristas (una di cada poliedro) y que tendra suo lada aqua. les, por lo que cerá o un combo si las dos aristas son designales, o un cuadrado ei son ignales.

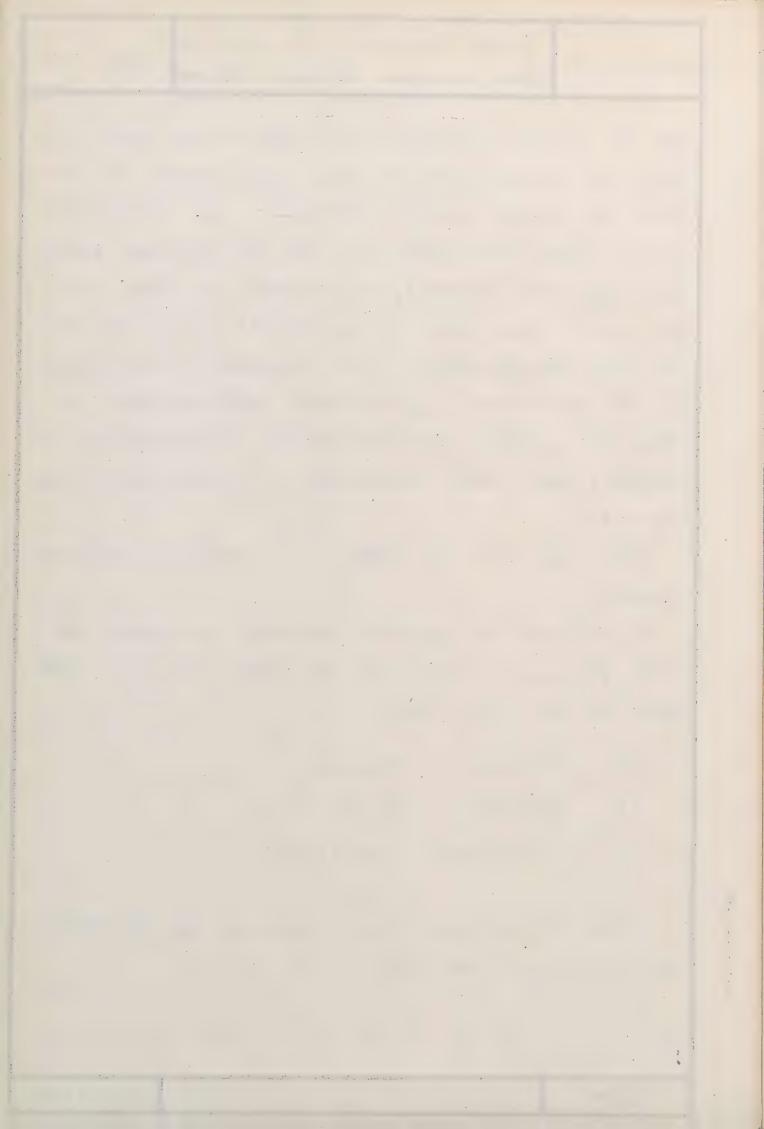
En ambos casos, y repitiendo esta operación en todas las axistas concespandientes, obtendremos un policales de caras anadradas o reintires todas ignales.

Estos son los que vamos a estudiar regnida-

El mimero de poliedros diferentes, querados de esta forma, seià de tres solamente y se obtendran de los conjugados

- Tetraedro tetraedro a)
- Escaedro octaedro 6)
- Dodecaedro icosaedro. c)

Pasemos a estudiar, como ejercicio de .T. lami. ma, el primer caso a).



PROCESO GRAFICO

El trasado gráfico del poliedro buscado, consiste en determinima previamente la vertices del tetracdio ando, y segnidamente los de su conjugado.

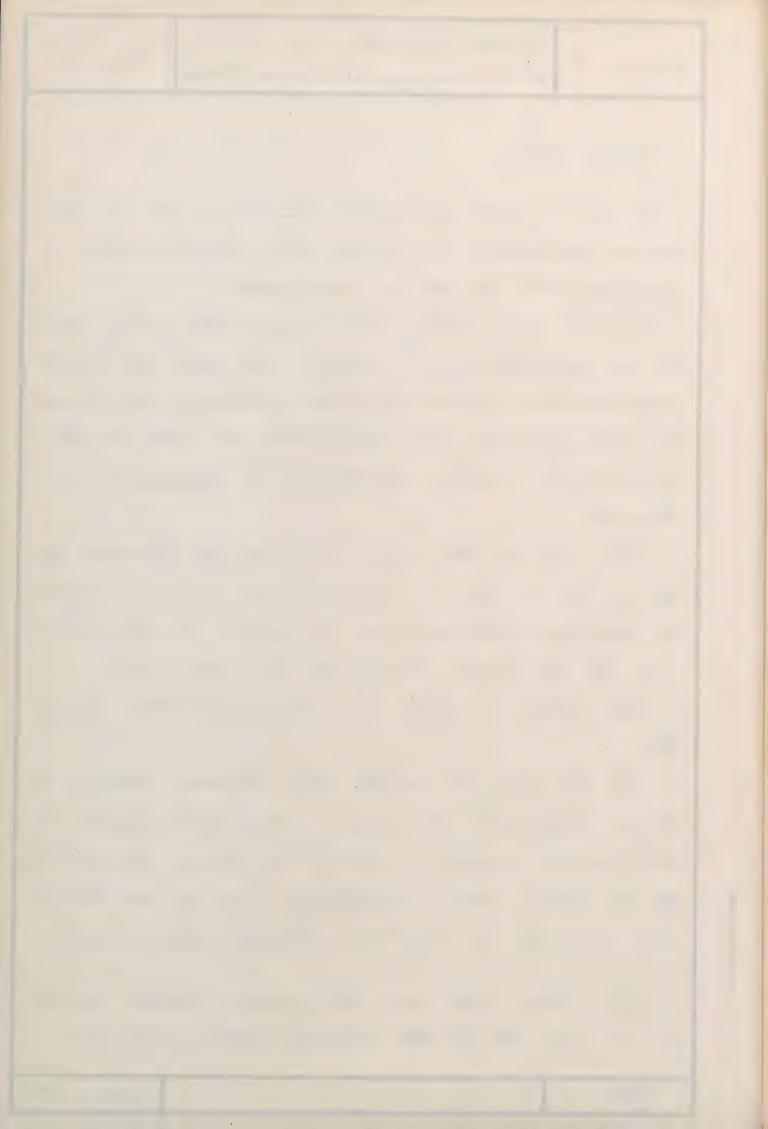
I continuación tastara avair consecutivouscute, forman do un madrilatero, los extremos de cada dos aristas perpendiculares / una de cada policido); estudiando en cada projección la viribilidad de cada arista del potredro pedido, se ittendia la representación

Para el trasado de los vértices del tetraedro dado y de los de su conjugado, se seguira el proceso analogo estudiado en el ejercicio de la lamima 11, por lo que omitimos su repeticion.

de policaro buscado tiene das propiedades signion-

1: Por ser las aristas del tetracdio dade y las de su carifugado, de igual magnitud (anto imcritos en la misma estera, la figura germetrica de sus cinas seran madrados (pr. sus diegomales ignales ; perpendiculares), y todas ignales.

2º Como cada cara del priedro bucado contieme a una arista del poliedro dado. La también



otra de su seupe, el cuincero de caras del mismo pera ignal ai a mes de aniste les tetractes; por consequiente tendra 6 anos

3° El ammero de sus vértices vera pues la cuma de la au tetraedro dado y los de un conjugado, terriemes por consigniente 4+4 = 8 vertices

4° ano cada cara tiene de lados ignales, el mimero de aristas del poliedro buscado sera \frac{1}{2} (4 x 6) = = 12 aristas, siendo 6 el minuero de caras; todas las arestas serán iguales.

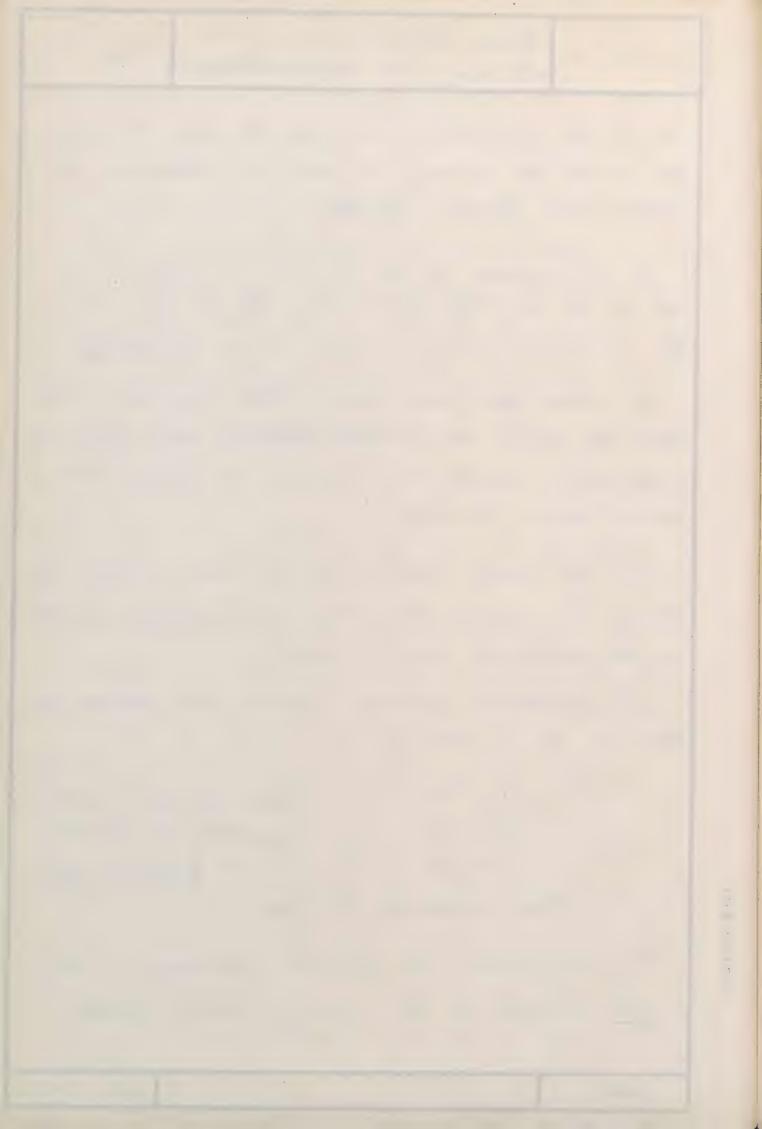
5° El poliedro pedido rera convexo, ya que que. da en un mismo semiplais al prolongar el plano de cualquier cara de aguél.

bas propiedades autoriores definen al poliedes pedido por las condiciones

> A = 12 Caras cuadradas

Gene son las que cumplen sinicamente el Escaedro regu-

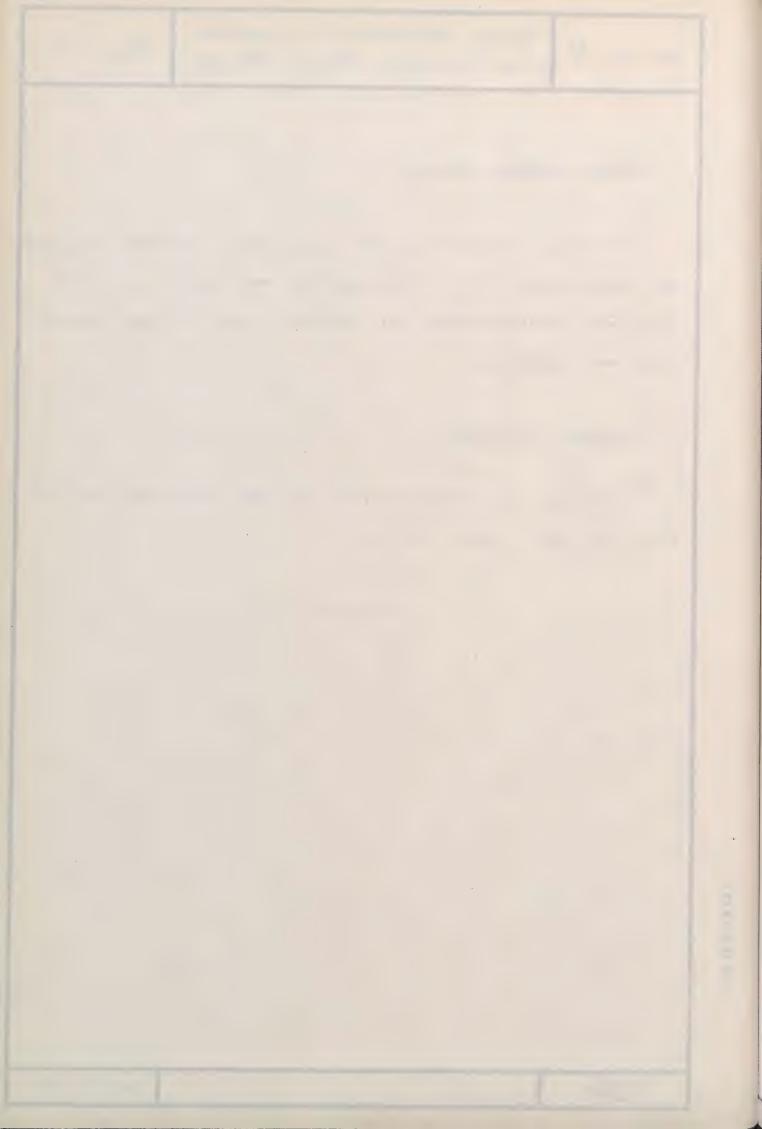
Por consigniente, el poliedro buscado es un cubo inscrito en la crisma esfera dada.



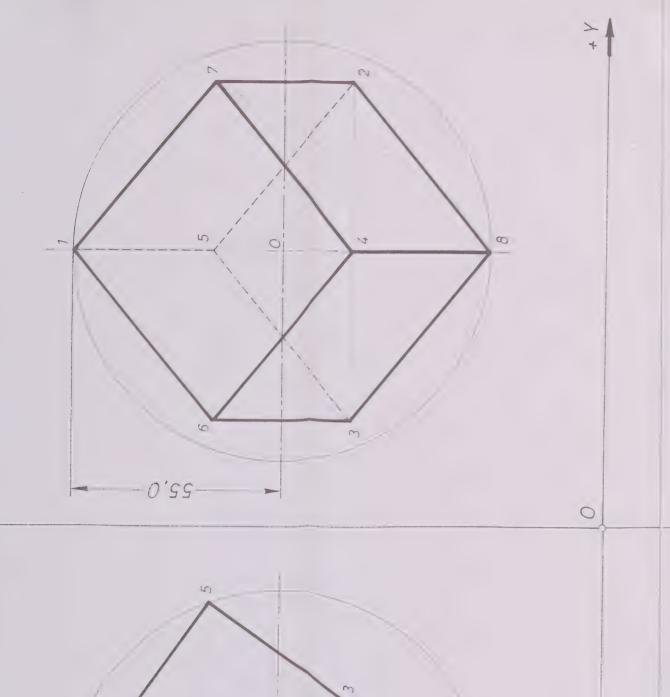
il correlo analítico de las mocalitates aestadas, en iquel al describer ou la lamina 25, cuyo parceso, cuadro simptico correspondente en identices y por lo cual carili-

FIGURA CORFORES

nome de lado (ver lan, 2).



Z+



850

ENUNCIADO

gular y de su tetraedro conjugado por 4 P sus aristas cuando se unen consecu-Representar por el método gráficotivamente los extremos de dos arisanalítico, en los planos I, II y III, poliedro derivado de un tetraedro tas correspondientes en ambas.

R'15

55mm, y las El radio de la esfera circunscrita centro O, son: al tetraedro dado, es de de su coordenadas

0 (72, 72, 85) mm.

65-Q A3.v Dibujar en formato cala 1:1.

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

4 00 ∞ 0 0 0 Tetraedro dado (rojo)_____ Tetraedro conjugado (azul)___ Poliedro derívado (negro)_

1+

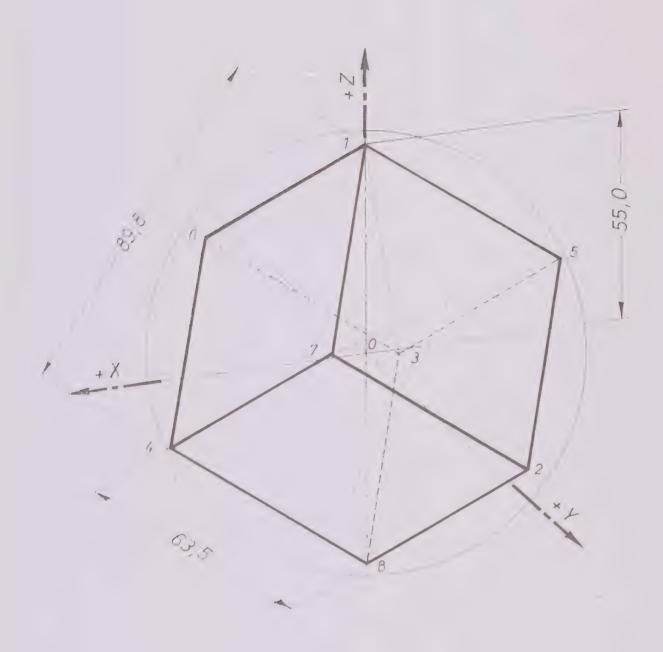
	Propuesta De entrega Entregada	De	entrega	Entregao	8	Califi	
Fecha.						cación	
Alumno:				,	T		
I scala			Jori	Dorivado do	1 3		
		7	1100		3))	
				tetraedro-	ec	fro-	- 1

s conjugados Escuela tetraedro (firma)

Lámina 30

- 19 Curso 19





Derivado de los conjugados tetraedro-tetraedro



1

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y II, el poliedro derivado de un exaedro regular y de su octaedro conjugado por aus aristas, cuando se unen consecutivamente la castremos de dos aristas correspondientes en ambos.

El radio de la esfera circumscrita al octordo dado (de mayor radio), es de 35 mm, plas condenadas de su ceretro O son: U/72 22 357 ma Dibujar en formato A3V y a escala !!1.

DATOS

0 (73, 73, 85) mm. $a_0 = 55$ mm



E

EXAEDRO - OCTAEDRO

CONSIDERACIONES PREVIAS

En las laminas 13 y 14 hemos estudiado los poliedros coniquezado del exacedro y octordos requileres, totanido, al trazar por los puntos medios de las aristas del poliedro dado,
nectas perpendiculares al plano determinado por dichas aristas y el centro de aquel.

do por la intersección de ambos conjugados.

En la presente lamina 31 vannos a estudiar el poliedro derivado de anto conjugados enando a sucen sucesivamente los extremos de cada dos aristas correspondientes
con lo cual ottendremos combos todos iguales, que secan las caras del poliedro pedido.

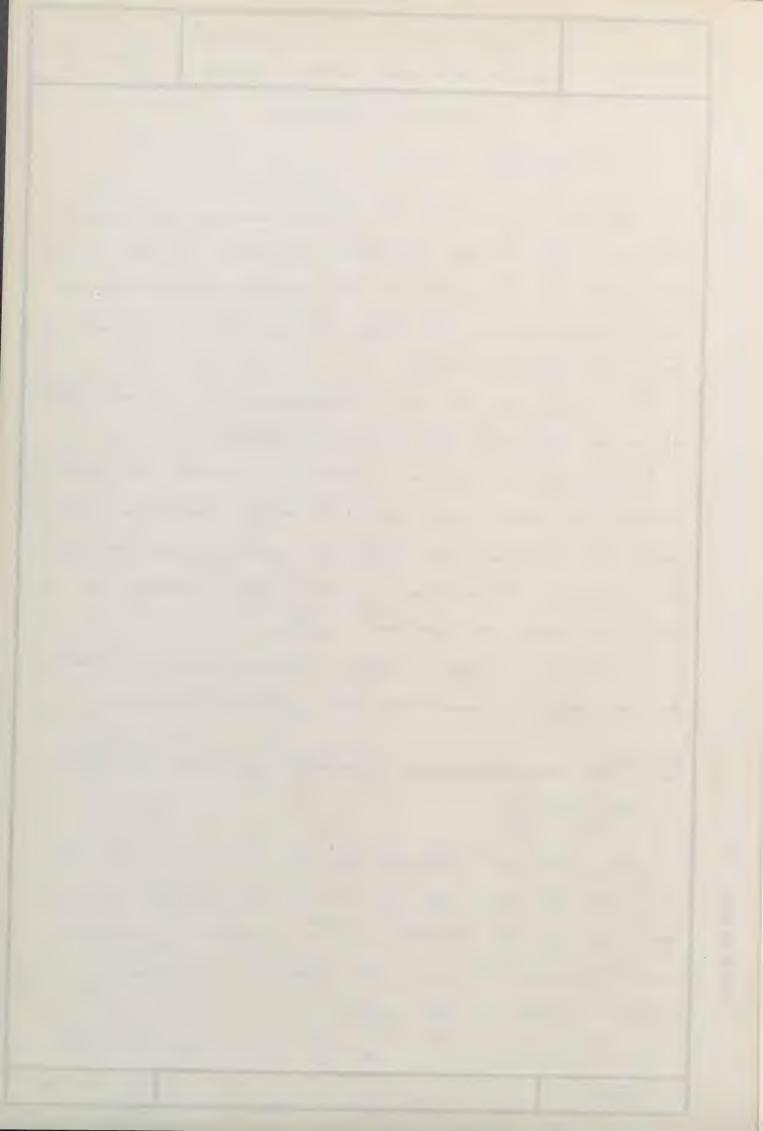
Previamente al estudio de su trasado, vamos a deducire las propiedades geometricas del poliedro derivado.

1º Testas sus caras son ignales j tienen la forma

En efects, en los trasados gráficos de las láminas 13 a 15 puede observarse que las aristes del octaedro son ma your que las del exaedro. Esto puede comprehense analiticamente modante la formula 11, lám. 2 $\frac{1}{2}$ firmula 21, lám. 3, signientes: $a_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} l_6$ $\frac{1}{2}$ $a_9 = \frac{\sqrt{2}}{2} l_8$, en las que

(20

5 - 10 - 70



to y by, tenderson

en la que haciondo de = ag, y siendo $\sqrt{2}$ \Rightarrow $\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

se verificara que a igualdad de cadiss de sus esfe-Mas circumscritas, rera

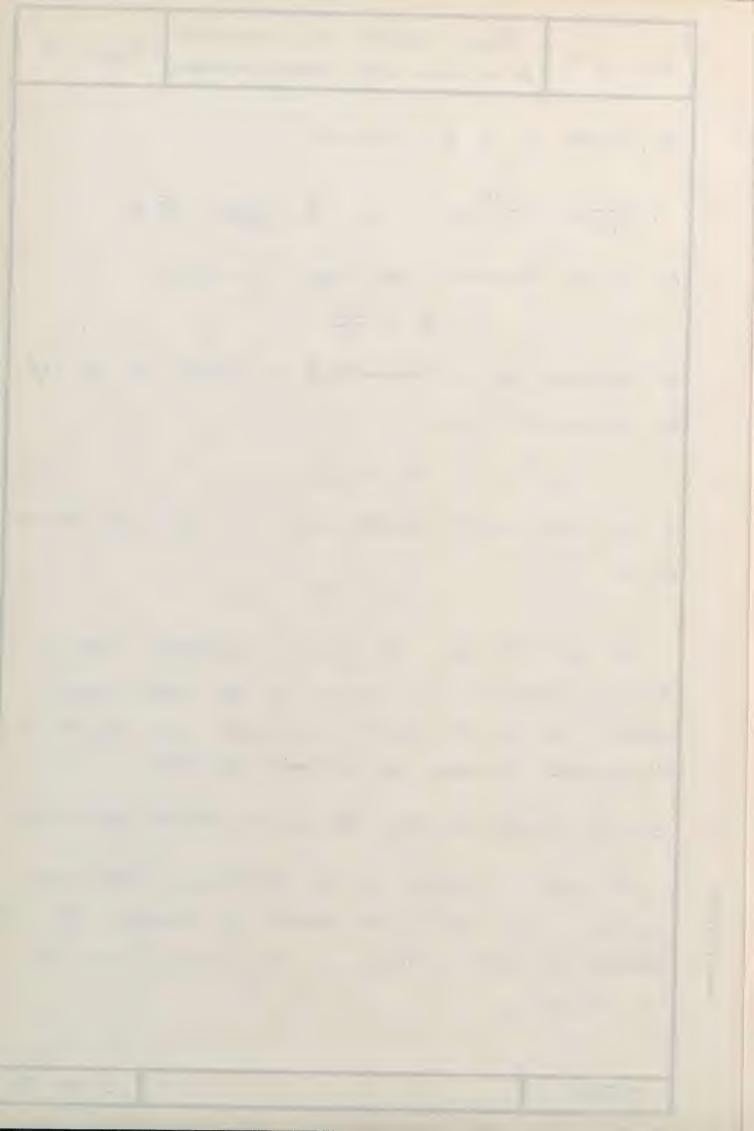
y an mayor motivo, cuando como en el caso que mos ocupa, es

ag > a6

Asi pur al ser la > 16, el cuadrilatero obternido al unir sucesistamente los esetremos de dos aristas correspon dientes en los dos poliedros conjugados, son combos, to dos ignales y caras del poliedro derivado

2° de caras del potiedio derivado, sera de 12

En efecto, en virtud de su generación, cada cara contiene una arista del escaedro y también otra del octaedro; en ambos poliedros es de 12 el minuero de sus aristas.



3ª El minero de virtices del proviedes derivado es de 14

Este animero sara el de la suma de los vertices del exactes (8) y del octacolo (6), generadores. del polie-

4º El poliedro derivado es convexo

Tues al prolongar el plans de cualquiera de sus caras, queda todo él en el mismo remiespacio.

5ª El minnero de aristas sera de 24

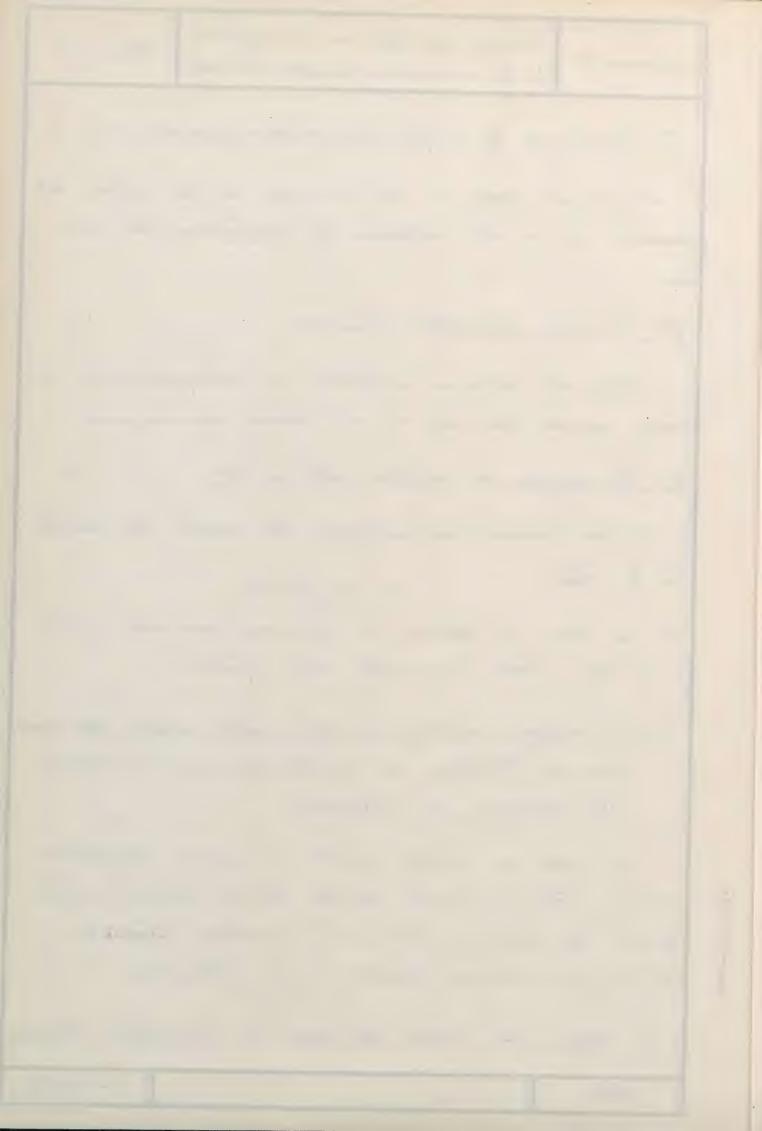
Pa ser convexo, se verificara la relación de buler C + V = A + 2

de la que se deduce A, ya que conocemos C=12 J V = 14. Todas las aristas son ignales.

6º Los aire le solides formades en les vértices del exaldro sere triedros, y la formadas en la vértices del octaedro, son tetraedro.

ya que en dichos vértices concurren respectivamente tres o matro aristas de la policidio cerejugadin dei peres escistisan en el policido derivado 8 anguls solides trieders of 6 tetracdres.

7º Existe una esfera que pasa por les verties tetraedros



La commenda al petredes dado.

3º seite una esfera, concentrica con la anterior que destinta de esta que pera por la vertices triedros. ba circumscrita al exactes conjugado y de menor radio que la outeris.

Écciste una esfera, concentrica con las autériores, tan gente a las mistas, no en su punto medio.

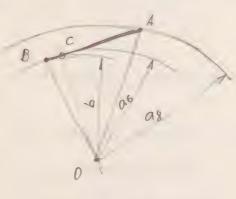
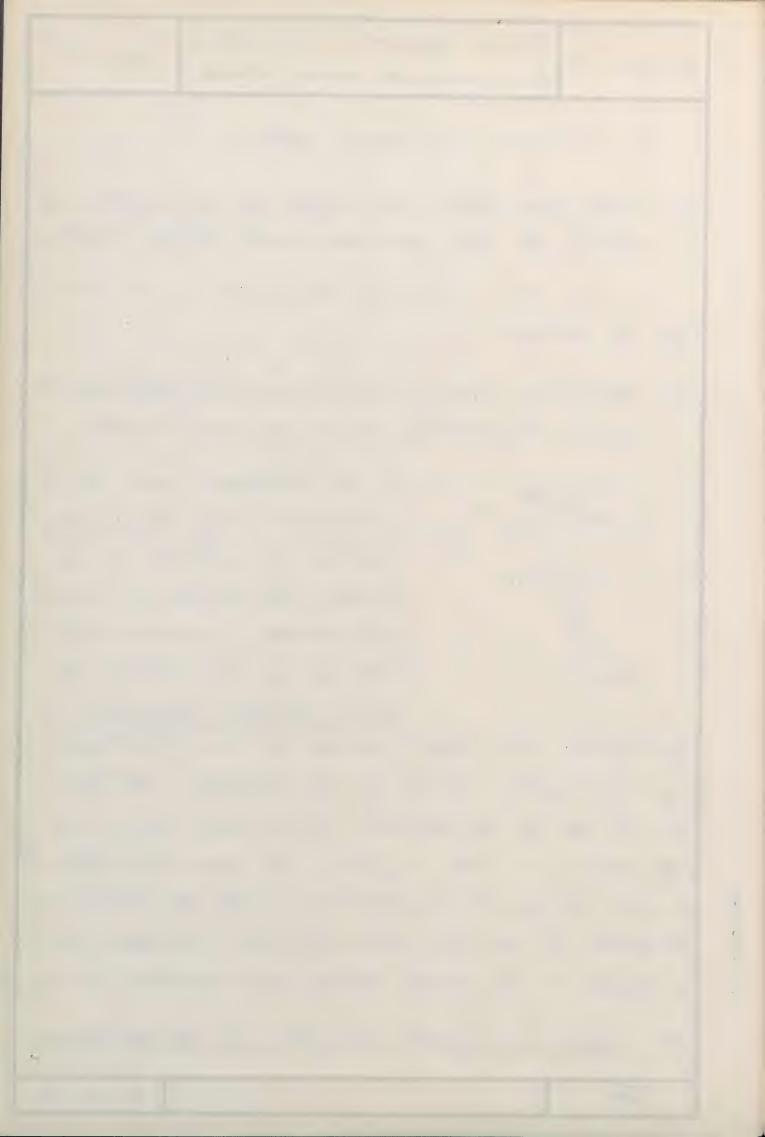


Figura 1

Li comideranos una arista cualquiera A-B, (fig. 1), eugo extremo A pertenceca a un vertice del octaedro y el Baotro del escaedro, y unimos estos extremos con el centro 0 de

triangulo DAB tene DA > DB por ser DA el radio a de la esfera circurscrita al octaedro y Op el nadio a de la del escaedro or ya hemos visto en la propiedad 1: que ag > ag. Asi pues, la astura oc de este trianquelo (constante para todas las aristas), serà el radio b de la esfera tangente a dichas arista, y el pre C de d'elsa altura no equidistara de A 2 B.

10° Escrite una estera, concentrica con las anteriores,



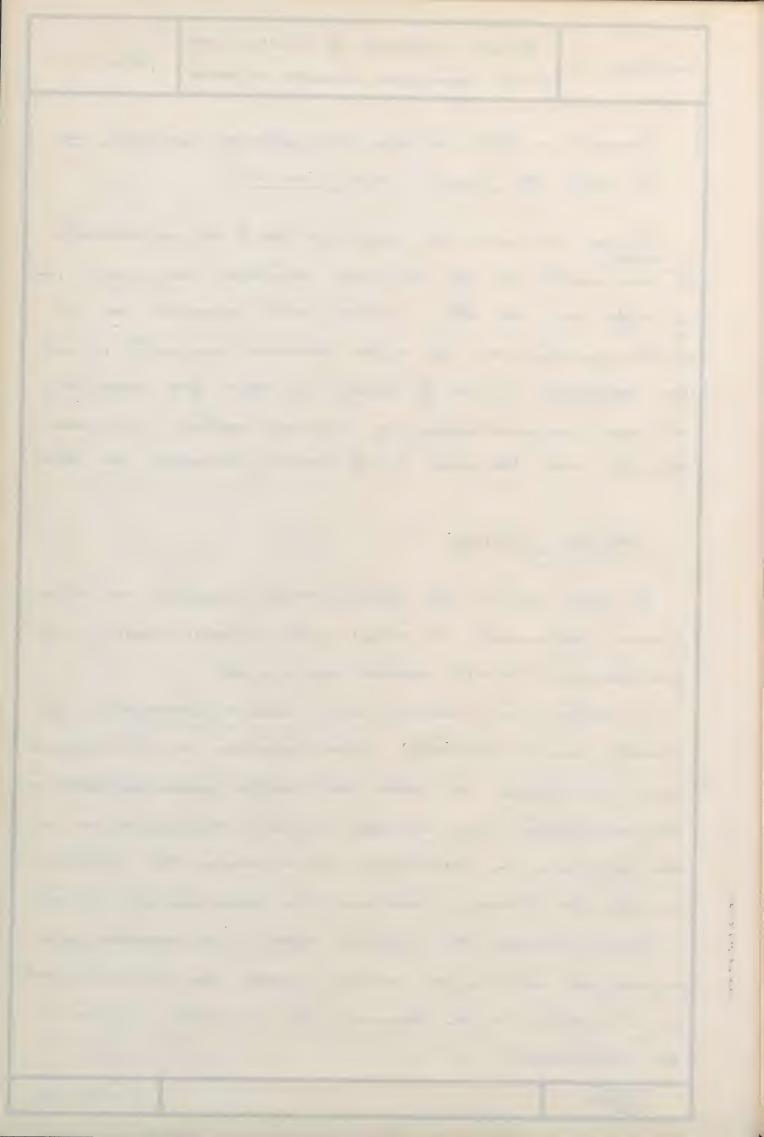
tousante a todas las caras del poliedro derivado, en el centre sur rombo (esfera inscrita).

Por ser el centro del combo el punto de intersección y onedio) de dos asistas de la paindes regulares conjugado (una de cada uno de ellos), dicho punto coincide con el de tangencia de la expera commin tangente a ambos polioders, y pre la fauta, el riadio que pasa por el sera perpendicular a ambas aristas; por consiquiente rerà tangente a la cara formada por ellas.

PROCESO GRÁFICO

El trasado gráfico del poliedro pedido, consiste en determinar previamente los vértices del octaedro dado, y sequidamente los del exactro conjugado.

A continuación Castará unir consecutivamente, formando un cuadrilatero (paralelogramo en las projecciomes!, les extremes de cada des arestas perpendientares en reces peridicules (una de cada polidio); estudiando en cada projección la visibilidad de las aristas del polisdro buscado, ne obtendia facilmente la representación de este. Time il mondo del octardio dado, y del escaredio comjugade, se sequira el orismo proceso que el estudiado en el ejercicio de la làmina 15, por lo que omitimos su respeticion.



Para simplificar y dar mais exactitud al trasado, es muy util el surples de cotas calculadas previamente en forma analítica.

En este ejercicio consideraremos las signientes magnitudes: del poliedro derivado:

l - Saista del poliedro

a, = Radio de la esfera que pasa por los vértices tetraédricos (los del octaedro dado).

a : hades de la esfera que para por los mérticos trie-

b = Radio de la estera tougente a las aristas

c = Radio di la esfera tangente a las caras

la = Arista del octaedos dado

le : Arista del cubo conjugado.

l≡ = Distancia entre los centros de dos caras contiquas.

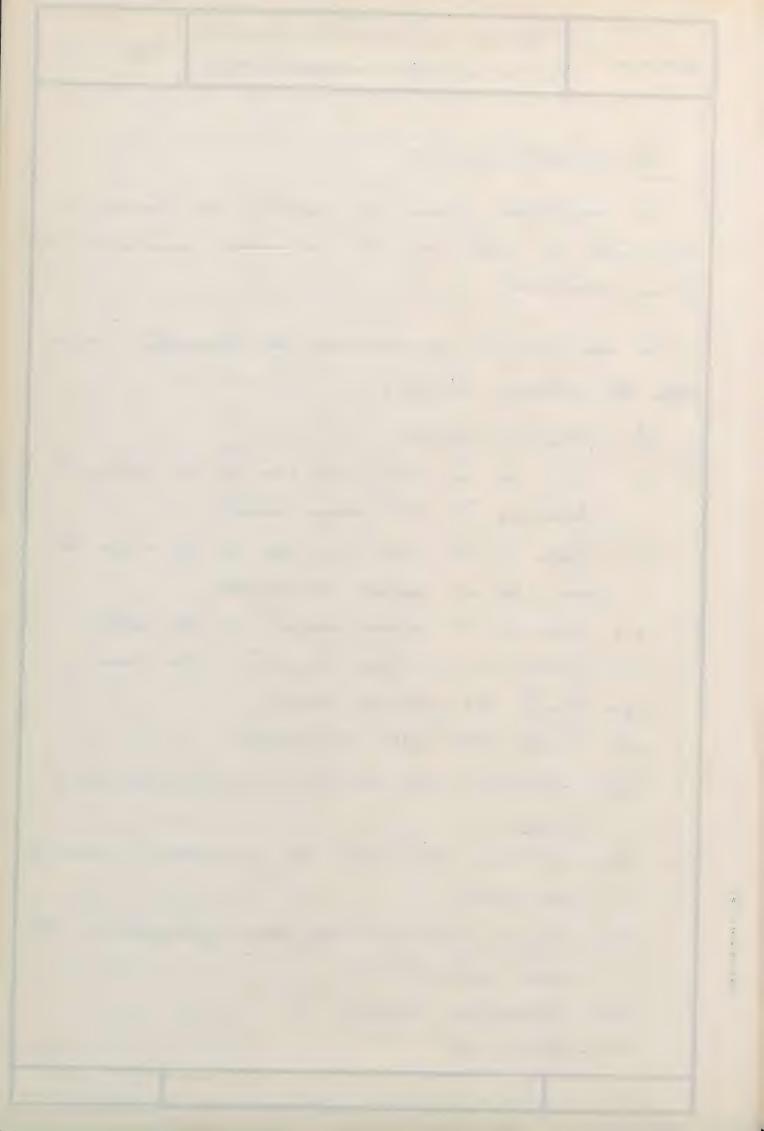
p = Distancia del centro de una cara a uno de sus lados

24. Anquée rectilines del diedro formado por dos caras contiguas.

S = Inperficie lateral

V = Volumen

JNE A4 210 X 297



Esdas las magnitudes auteriores las calcularemos en función de a_1 ; radio de la expera circumsente al octaedos regular dado.

a, = ladio de las estera que para par ventices totracidios.

Dato del ejercicio

la = Arista del octardo dado

De la formula 137, lan. 13, se obtiene que

a, = a'8 = le y de la foim. 136, que

l'8 = l8 = V2 l6 = V2 a1

le = Arista del cubo conjugado

Por el calcula autorior venos tambien que

16 = a1

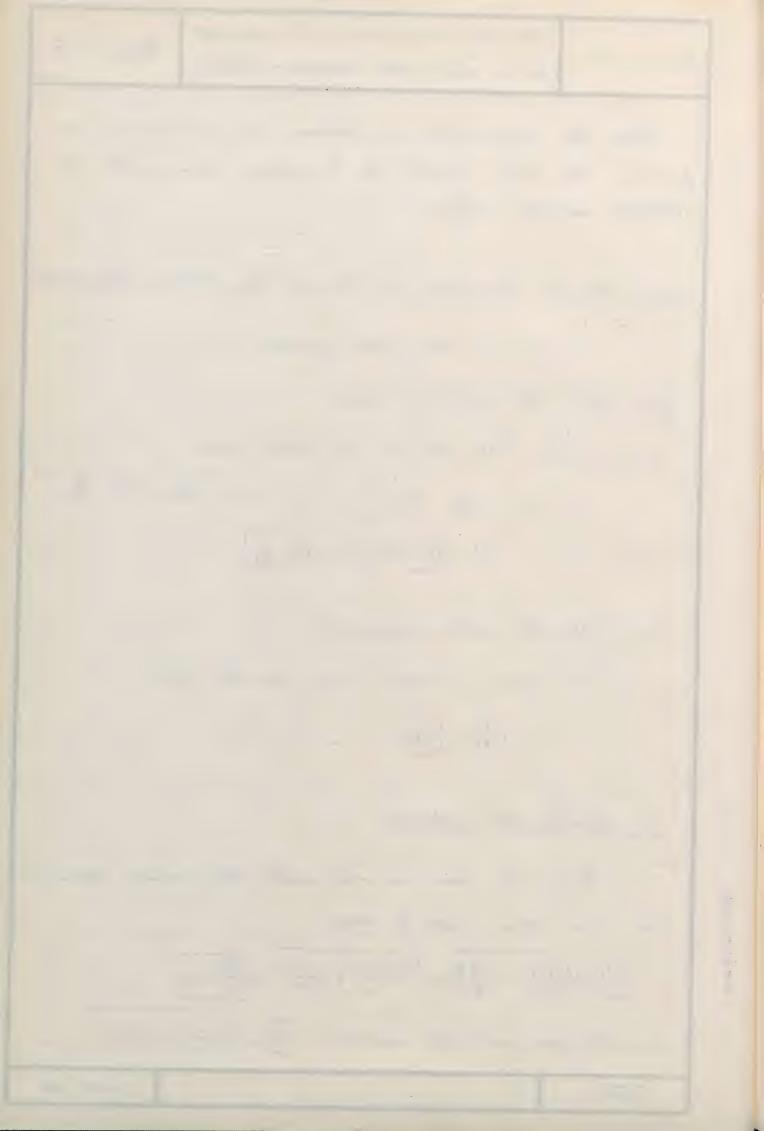
l = Anista del poliedro

le g la son las diagonales del rombo que for-

 $\mathcal{L} = \sqrt{\left(\frac{\ell_{\ell}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell_{\ell}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a_4\right)^2 + \left(\frac{a_4}{2}\right)^2} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}a_1}$

Desarrollo del calculo auterior: $l = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}a_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2}$

UNE A4 210 X



$$=\sqrt{\frac{2}{4}(a_1)^2+\frac{1}{4}(a_2)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}}(a_1)=\sqrt{\frac{3}{2}}a_1$$

p - desiracia del centro de una cara a una de eus

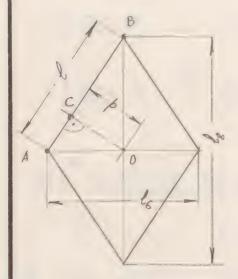


Figura 2

En la figura 2 hemos representado una cara del poliedro pedido (combo de diagonales le 7 lg). Cracemos por O la perpendicular al lado AB, siendo C el pie de la misma.

2 A.C.O son semejantes (angu-

to E.A.O commin), por lo que

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BO}} \quad de \quad donde \quad \overline{OC} = \frac{\overline{AO} \times \overline{BO}}{\overline{AB}}$$

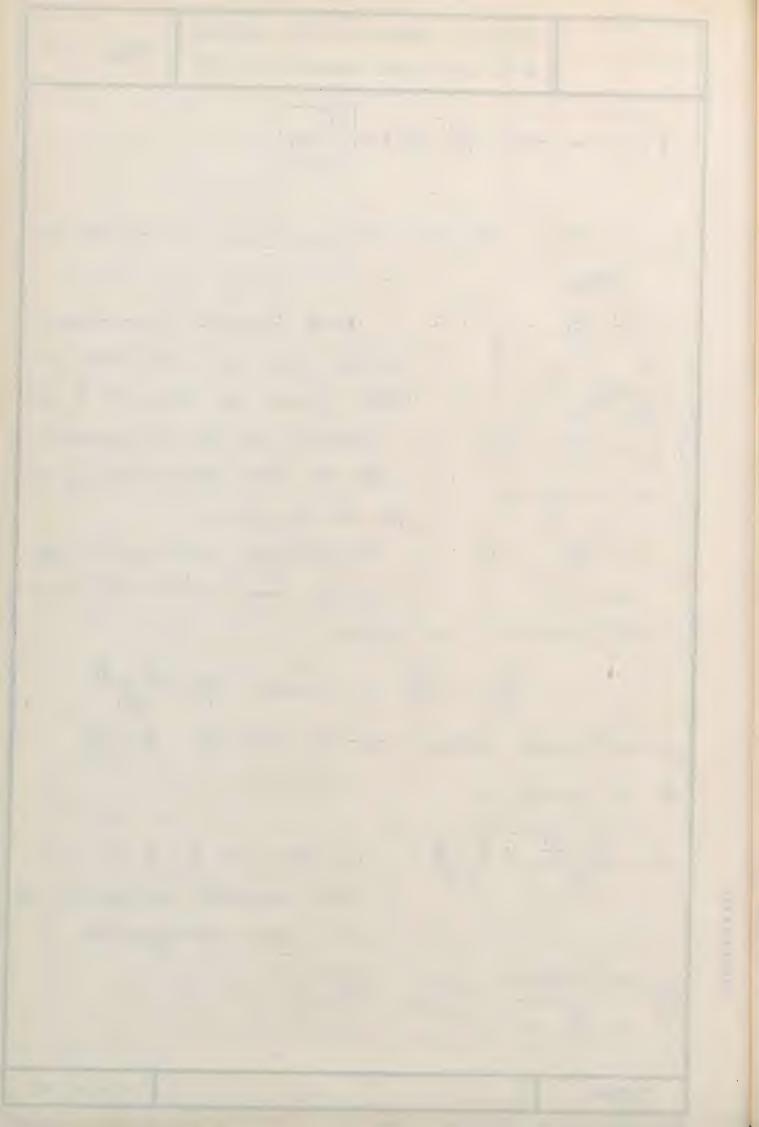
g sustituyendo valores oc= p, $\overline{A0} = \frac{\ell_6}{2}$, $\overline{80} = \frac{\ell_8}{2}$,

AB = l, tendiems

$$p = \frac{\frac{l_c}{2} \times \frac{l_8}{2}}{\ell} = \frac{\ell_c \times \ell_8}{4\ell};$$

los valores de la, la, la han sido calculados auteriormente por lo que sustitujendo

$$A = \frac{a_1 \times \sqrt{2} \times a_1}{4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times a_1} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} a_1 = \frac{\sqrt{6}}{6} a_1$$



az = hadio de la extera que pasa por los vértices triedros

Es il radio de la esfora circumsonita al cubo de lado la dodo, siento el valor de este en luncion de a,

y teniends en cuente la form. 11, lan. 2; rera

$$a_2 = a_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} \ell_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} a_1$$

b = Radio de la estera tangente a las aristas

Li serimos los eschemos C 2 B /fig. 3) de una arijta del poliedro derivado, con el centro A de la esfera circumsereta, se mos primara un triangulo 4.03, de

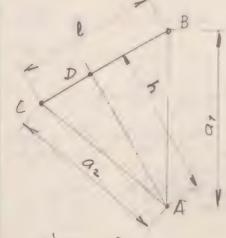


Figura 3

lados CB = 1; AC = a2 y AB = ag. La altura AD comes. pondiente al lado CB, sera el nadio pedido.

ten formation se de minestra que el area F del trianquels ABC, tiene el valor

F = \frac{1}{2} ah = \s (s-a)(s-b) (s-c), riendo \(\s \) semiperimetro, a, b, c la lada del trea colo. 7 h la altura correspondiente al lado a. De aqui x

(viase a la melta) 6-10-72

NOTA, - El proceso de carculo seguido su este estralio para la determinación del valor del radio b de la enfera tangente a las aristas, conduce con relativa facilidad a la obtención del resultado buscado. Al tratar de aplicar este mirmo proceso este en el ejercicio análogo de la la mima 32: para

en et ejercicio análogo de la lamina 32 para los conjugados dedecardos icorardes, troperamos con la deficultad material de simplificar un complicado radical que tenía la riquiente expressor:

 $\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}} + 1\right) \frac{a_1}{2} \times \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{10}} + 1\right) \frac{a_1}{2} \times \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} + 1\right) \frac{a_2}{2} \times \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}}\right) \frac{a_1}{2}}$

 $\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$ a_1

Después de varis intentos infructuosos, enfocamos de muevo el problema lajo un punto de vista trigonomietrico, la que mos llevo sapidamente a su solución, o obtenien. do el valor de

 $b = \frac{2\sqrt{5}}{5} a_1$

Este valor sera pues el resultado de la simplifieación del la complicado addical primitivo.

Li aplicamos el proceso seguido en la lácrima 32, a este caso obtendremos el crismo resultado por un camino más corto que detallamos a continuación:

(rigne al dorso de la paígina 10)

deduce in

$$h = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-a)}}{a}$$

En il cros particular que curs scupa, tendremos que

$$a = l = \frac{\sqrt{3}}{2} a_1$$

$$S = \frac{a + b' + c}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} a_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} a_1 + q_1$$

$$b' = a_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} a_1$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{2} a_1$$

$$s-a = \frac{\sqrt{3}+1}{2}a_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}a_4 = \frac{1}{2}a_4$$

$$S-b = \frac{\sqrt{3}+1}{2}a_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}a_1 = \frac{1}{2}a_1$$

$$S-C = \frac{\sqrt{3}+1}{2} a_1 - a_1 = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}-1\right) a_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} a_1$$

h = b

y sustituyendo estos valores en la fóronnele genenal, tendremos

$$\boxed{b} = \frac{2\sqrt{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} a_1 \times \frac{1}{2} a_1 \times \frac{1}{2} a_1 \times \frac{\sqrt{3}-1}{2} a_1}{\frac{\sqrt{3}}{2} a_1} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}} a_1$$

Desarrollo del calculo auterior:

$$\begin{bmatrix} b \end{bmatrix} = \frac{2\sqrt{\sqrt{3}+1}}{2} a_1 \times \frac{1}{2} a_1 \times \frac{1}{2} a_1 \times \frac{1}{2} a_1 \times \frac{13-1}{2} a_1}{\frac{13}{2} a_1} = \frac{2\sqrt{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)} \times \frac{1}{4} (a_1)^2}{\frac{13}{2} a_1}$$

CO.

7 - 10 - 70

$$a_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} a_1 \qquad l = \frac{\sqrt{3}}{2} a_1$$

$$\frac{(a_2)^2 + \ell^2 - (a_1)^2}{2 a_2 \ell} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a_1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a_2\right)^2 - (a_2)^2}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}a_1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}a_2} = \frac{\frac{2}{4} + \frac{3}{4} - 1}{\frac{2}{4}}$$

$$= \left(\frac{3}{2} - 1\right) : \frac{3}{2} = \frac{1}{2} : \frac{3}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{ seu } \mathcal{L} = \sqrt{1 - \cos^2 \mathcal{L}} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3} \sqrt{2}$$

¿ finalmente

$$b = a_2 \text{ sen } d = \frac{\sqrt{3}}{2} a_1 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3} a_1$$

Valor concidente con el ja obtenido.

 $= \left[2\sqrt{\frac{2}{4}} \times \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right] a_1 = \left[\frac{2\sqrt{2}}{4} \div \frac{\sqrt{3}}{2}\right] a_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a_1 = \frac{\sqrt{6}}{3} a_1$

C = Radio de la colora targente a las caras

tas de une de les des privides compagnets a las ria-

da auteriormente en funcion de a, es de

lo = a1

y el radio de la espera tampente a la mista di este cubo, valdra (ver join. 12, lan. 2)

$$C = b_6 = \frac{\sqrt{2}}{2} l_6 = \frac{\sqrt{2}}{2} a_1$$

Le obtendrà este mismo valor partiendo del octaldro, cuya arista

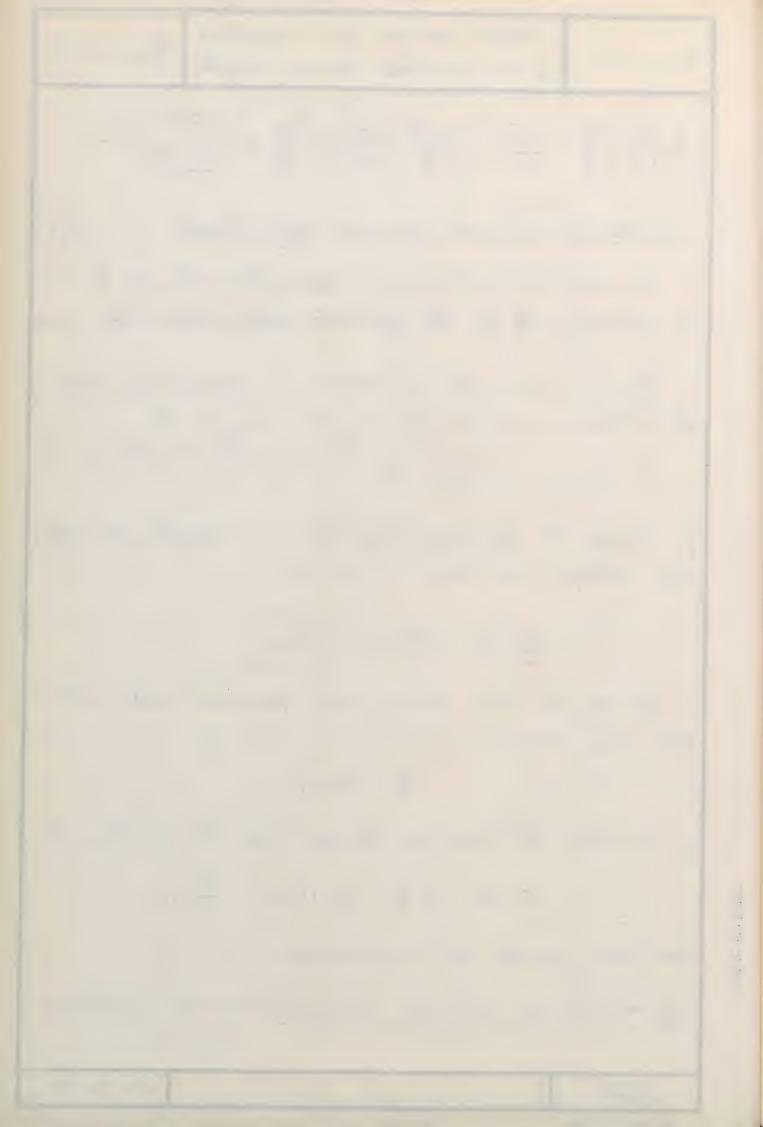
le = V2 a1

y el radio de la esfera tangente (ver form. 22, lam. 3)

$$C = b_8 = \frac{1}{2} l_8 = \frac{1}{2} \sqrt{2} a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} a_1$$

valor coincidente con el anterior.

l_{II} = Distancia entre los centros de dos caras contigues



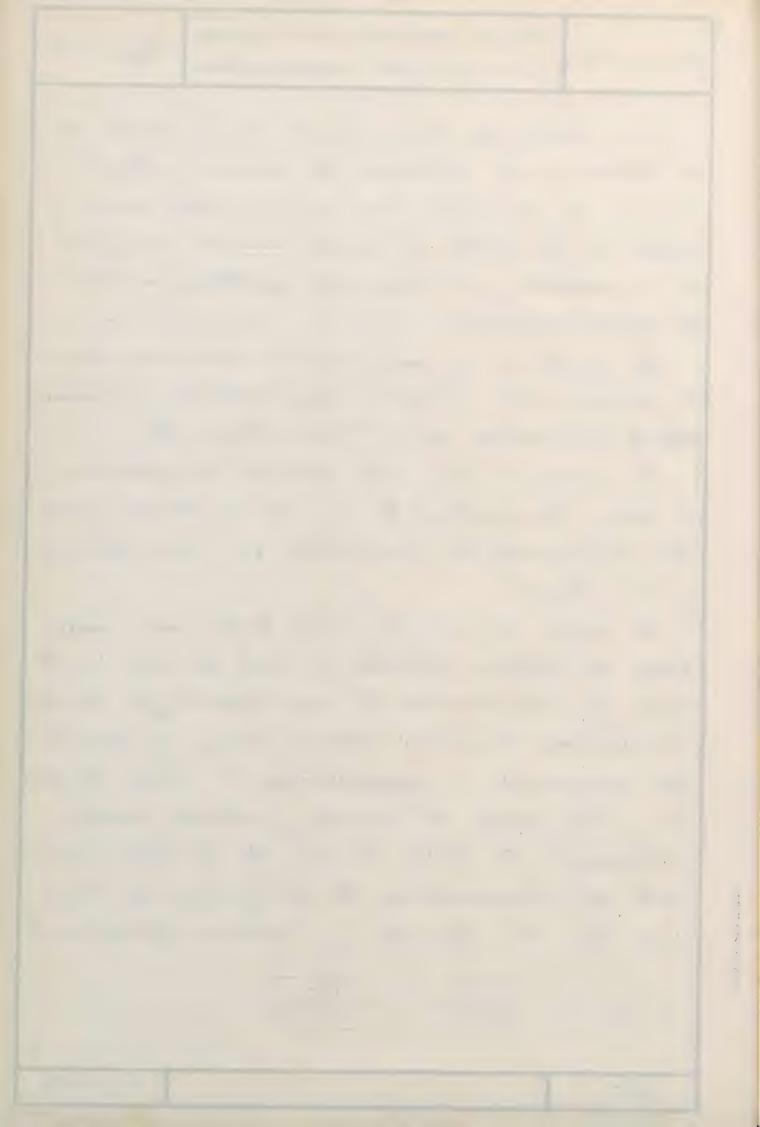
des el estudio que hierario en la lamina 15 del poliedes obtenidos por la interacción del exaedro y octaedro con
jugados por sus aristas, nimos que el sobido común a
anabos es un priedro mo asquelas, escureros compuesto
de 6 cuadrados y 8 trianquelos equilateros de lados
de igual longitud.

les demonsions ados " Polisdos arquirendiares " y le hemos designado un il crombre de "Arquirendiares "."

Les la lamina :34 se ha éfectuado la representación de dider Arquimediano II, así como el calculo analitico de en principiles magnitudes, que tienen aplicación a este ejercicio.

En efecto, al unir los centros de dos caras contiquas del poliedro estudiado en esta lamina, se obtiene un "Arquimediano II", cuyo lado la esta dimensión que deseamos obtener aliona, y cuya esfera circumscrita es coinicidente con la estera tangente a las aristas del escaedro y octaedro dados.

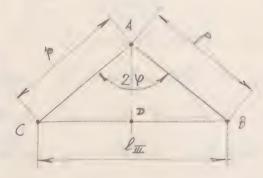
Mas como por otro parte, el radio de la estera circumscrita al Arquimediano III es ignal a su lado
(ver lain. 34 !?) formula), tendremos finalmente



24 = logali restilius de dedis formado por do casar en-

Li consideramos el diedro formado por dos caras contingo en una arista cualquiera del poliedro derivado, y cortamos dicho diedro por un plano perpendicular a la arista, que pase al mismo trempo por el centro de una de las caras, dicho plano pasarà iqualmente por el cutro de la otra (todas las casas son iguales); las intersecciomes de dicho plano con las dos earas, serán lados del angulo rectilines del diedro.

Li unimos seguidamente los centros de las dos caras.



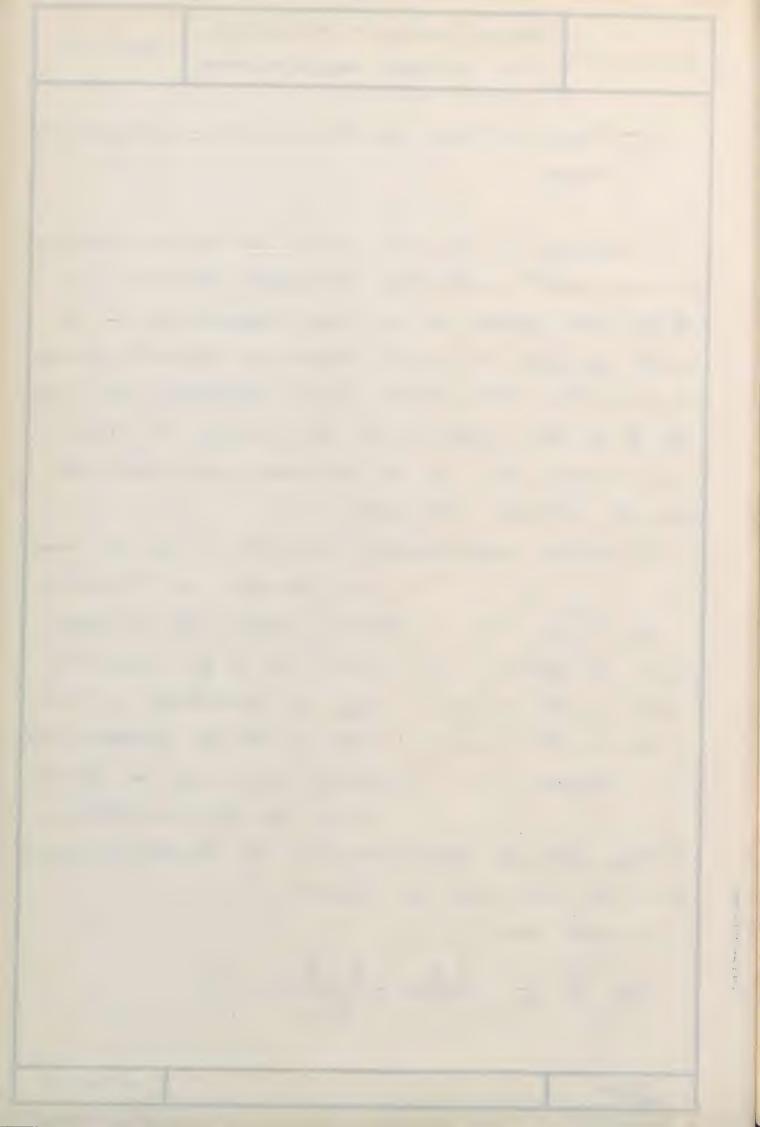
se mos formara un trianquelo isosceles A.B.C (fig. 4), mya tare C-B es la magnitud lare C.B. es la magnitud

la ja calculada, g los la
la dos ignales la distancia del Figura 4 centro de la cara a la anista, o sea la manitud p

también obtenide anteriormente, El angulo A opues. to a la base surà el buscado.

in valor rerá :

$$| \underline{au} \ \ \varphi | = \frac{\underline{c} \, \underline{d}}{\underline{c} \, \underline{d}} = \frac{\frac{1}{2} \, \underline{d}_{\underline{m}}}{\underline{d}} = \frac{\frac{1}{2} \, \underline{d}_{\underline{n}}}{\underline{d}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



for which ordered to week!

$$new \varphi = \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \varphi = 60^{\circ} \qquad 9 \ \varphi = 120^{\circ}$$

S = Superficie lateral

El area I de una cara (umbo) es deduce de mu disgonales (fix. 2), y una:

$$S_{1} = \frac{\ell_{6} \times \ell_{9}}{2} = \frac{a_{1} \times \sqrt{2} a_{1}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (a_{1})^{2}$$

y la total 3 del policies (13 mas)

$$S = 12 * \frac{\sqrt{2}}{2} (a_1)^2 = 6 \sqrt{2} (a_1)^2$$

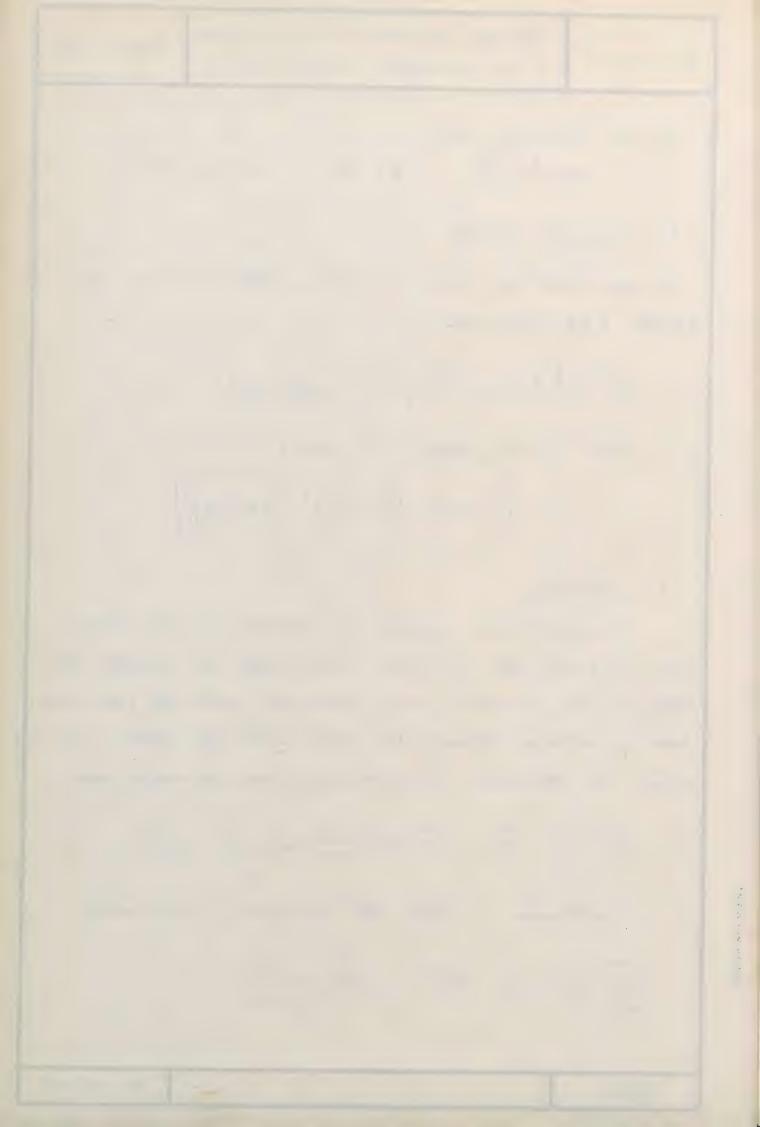
V = Volumen

Li consideramos unidos los vertices de una cara, con el centro de la es, en circumscrita al poliedro desivado, se mos formará una piramide acta de base combica q'altura igual al radio c de la espera inscrita. El Monere Va de diche piramide sera pues

$$V_1 = S_1 \times \frac{1}{3} C = \frac{\sqrt{2}}{2} (a_1)^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2 \times 3} (a_2) = \frac{1}{6} (a_2)^3$$

y el volumen V total del potendie (12 peramides)

$$V = 12 \times \frac{1}{6} (a_1)^3 = 2 (a_1)^3$$



in al eneder simplico que donze a continuación rem-

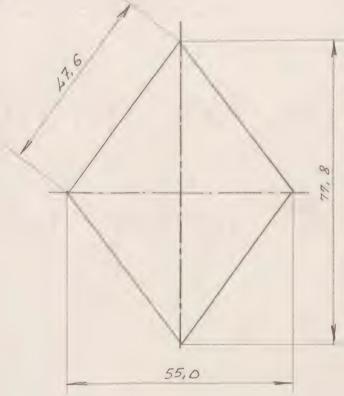
Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado		
l	V3 Q1	0.86 60 25 a ₁		
02	√3 a₁	0.86 60 25 01		
Ь	V6 3 a	0.81 64 97 a ₁		
С	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ a_1	0.70 71 07 01		
l ₈	V2 91	1.41 42 14 01		
ℓ_6	a_{i}	1.00 00 00 01		
ℓ_{m}	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ a_1	0,70 71 07 01		
P	V6 6 a1	0,40 82 48 01		
2 φ	sen $\Psi = \frac{\sqrt{3}}{2}$	sen $\Psi = 0.86 60 25$ $\Psi = 60^{\circ} 2\Psi = 120^{\circ}$		
S	$6\sqrt{2} (a_1)^2$	8. 48 52 81 (a,) ²		
V	$2 (a_1)^3$	2,00 00 00 (a1)3		
Relaciones entre magnitudes				
$l = a_2$ $l_g = 2c = 2 l_m$ $c = l_m$				



Chi. . 15

FIGURA CORPÓREA

Le obtiene por acoplamients de 12 combis, cuyas diaquales son los lados de los dos poliedros conjugados dados.



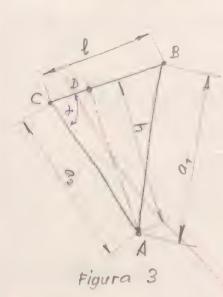
ba longitud de la arista (47,6 mm) sirve de comprobación al trasado.



Aclaración de la NOTA al dorso de las pags, 9 y 10



b) Pretio de la colora torrequete a les arrites



Ji unimos los extremos C 9 B

(fig. 3) de ma arista del poliedro decivado, con el centro A de la esfeca circumscrita, se mos formará un

triangulo A.C./B, de lados CB = l,

AC = az 9 /AB = a, . Los altura

AD correspondiente al lado CB, será
el radio/pedido.

que ABC, tiene el valor

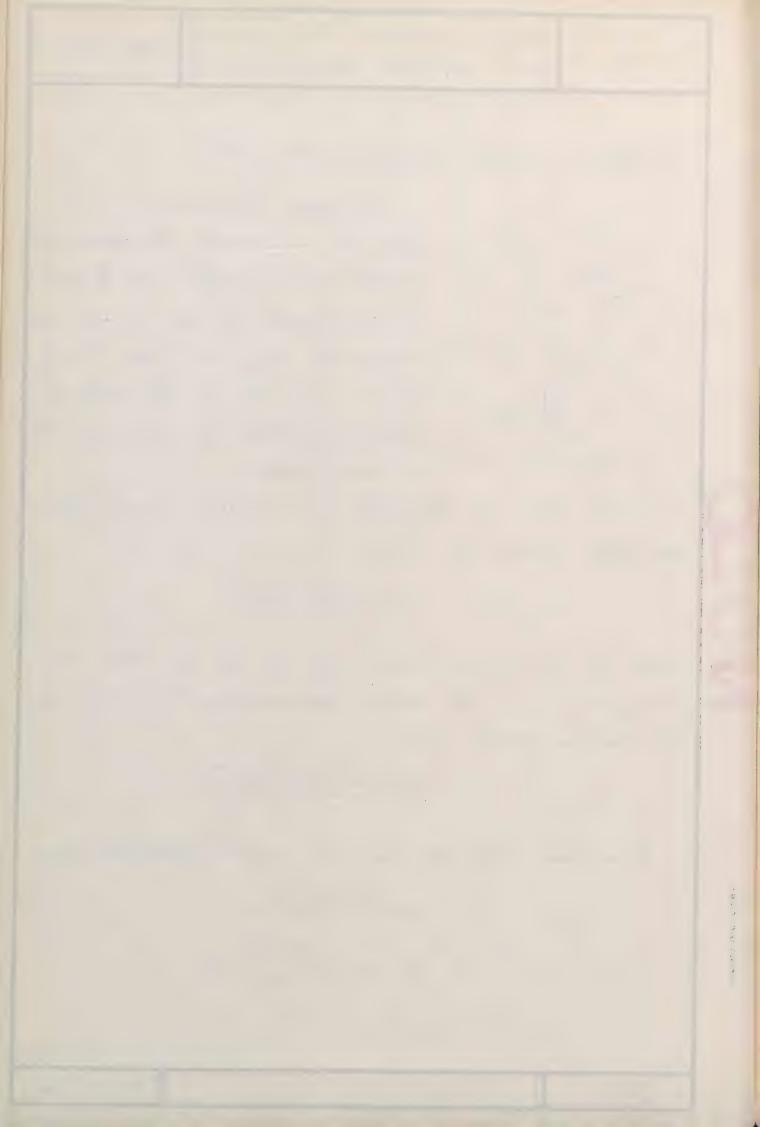
$$F = \frac{1}{2}ah = \sqrt{s(s-a)(s-b')(s-c)}$$

siendo s el semiperimetro, a, b, c la lado del triangulo, y h la altura correspondiente al lado a. De aqui se deduce que

$$h = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b')(s-c)}}{a}$$

En al raso particular que nos ocupa tradecurs que $a = l = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} a_1$

$$b' = a_2 = \sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}} a_1$$



(2°...

$$S = \frac{\alpha + \delta + c}{2} = \left(\sqrt{\frac{2 - \sqrt{c}}{2}} \alpha_1 + \sqrt{\frac{1 (c - \sqrt{c})}{10}} \alpha_1 + 2\right) \times \frac{1}{2}$$

$$s-a = \left(\sqrt{\frac{3(s-\sqrt{s})}{10}}a_1 + a_1\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3(s-\sqrt{s})}{10}} + 1\right)a_1$$

$$s-b' = \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \ a_1 + a_1\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \ t'\right) \ a_1$$

$$3-c = \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} a_1 + \sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}} a_1\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}}\right) a_1$$

y sustatujendo estos valores que la firmale que la tendrous

$$b = \frac{2\sqrt{(\sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{3(5-\sqrt{5})} + 1) \times \frac{a_1}{2} \times (\sqrt{3/5-\sqrt{5})} + 1) \times \frac{a_2}{2} \times (\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} + 1) \times \frac{a_1}{2} \times (\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{$$

$$\times \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}} \right) \times \frac{a_1}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5} a_1$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2} + \sqrt{\frac{9(5 - \sqrt{5})}{10}} + 1} \times (\sqrt{\frac{3(5 - \sqrt{5})}{10}} + 1) \times (\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} + 1) \times (\sqrt{\frac$$

y haciendo
$$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = p$$
 y $\sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}} = 2$, tendremos:

$$b = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{(p+q+1)(q+1)(p+1)(p+q)}{p^2}}.$$

$$\frac{\left(\sqrt{3} + |a_1|^2 + |a_2|^2 - |a_2|^2}{2 + \frac{\sqrt{3}}{3} a_1 \times a_2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\Delta \omega = \sqrt{1 - \frac{1}{0}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$L = a_2 \times \dots = \frac{\sqrt{3}}{2} a_1 \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{3}{4} a_1$$

$$a_1 = \frac{13}{2}a_1$$
 $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}a_1$

$$u_{\text{tot}} d = \frac{\left|\frac{\sqrt{5}}{2}\right|^2 + \left|\frac{\sqrt{5}}{2}\right|^2 - 1}{2 + \left|\frac{\sqrt{5}}{2}\right|^2 + \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1 + 1 - 1}{2}$$





6'77

ENUNCIADO

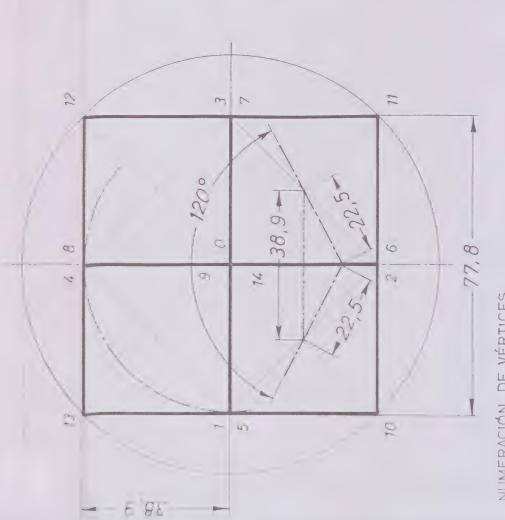
0

sus aristas, cuando se unen consecu-Representar por el método gráficogular y de su octaedro conjugado por retivamente los extremos de dos arisanalítico en los planos I, II y III, el poliedro derivado de un exaedro tas correspondientes en ambos.

octaedro dado es de 55 mm, y las El radio de la esfera circunscrita coordenadas de su centro 0, son: al

(72, 72, 85) mm. 0

es-Q A3v y Dibujar en formato cala 1:1.



NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Exaedro conjugado (rojo)___ Jeta-dro dado (azul)

Folledra Jerivado.___

9 01 14

1/4

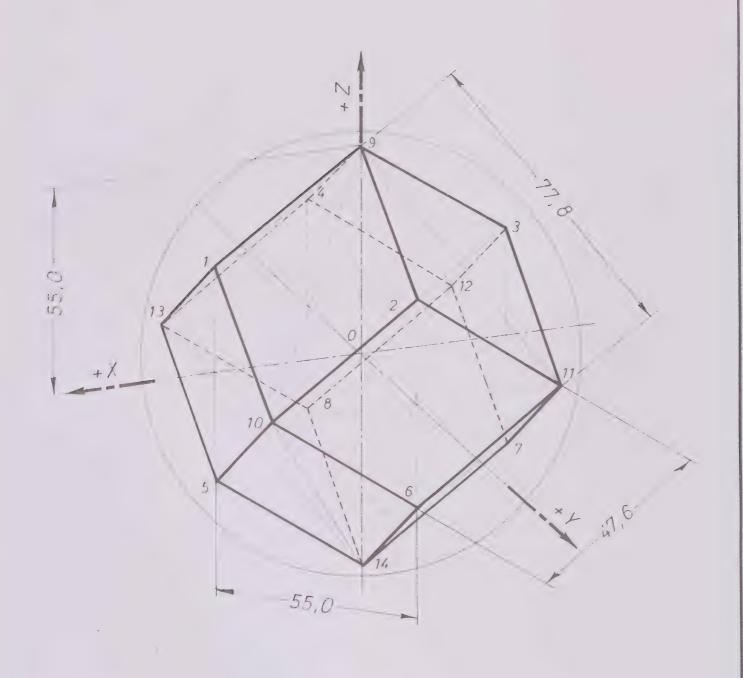
1+

	Escuela	Curso	Derivado de los conjugados	exaedro-octaedro
	(firma)		100 50	
Califi-	cación		de la	dro
Entregada			vado e	exae
e entrega			Deri	
Propuesta De entrega Entregada Califi-				
	Fecha	Alumno.	Escala	1:1

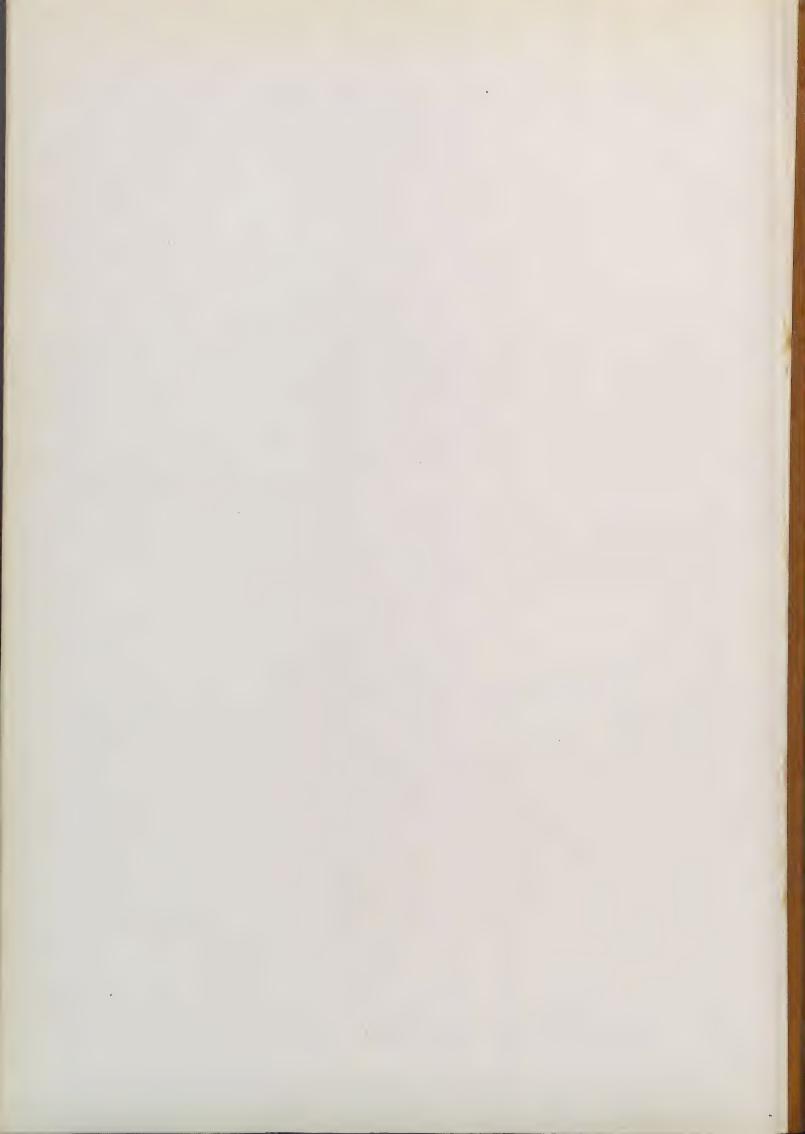
Lámina 31 - 19 Curso 19

aedro





Derivado de los conjugados exaedro-octaedro



B) De conjugados de aristas coplanarias y perpendiculares

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II q III, el poliedro derivado de un dode-caedro regular q de su icosaedro conjugado por en: aristas, cuando se unen consecutivamente los extremos de dos aristas correspondientes en ambos.

El radio de la esfera circumscrita al icosaedro (de mayor radio), es de 55 mm, y las coordenadas de su centro 0 son: 0 (72, 72, 85) mm.
Dibujar en formato 43 v y a escala 1:1.

DATOS .

0 (72, 72, 85) m m

a = 55 mm



DODECAEDRO - ICOSAEDRO

CONSIDERACIONES PREVIAS

En las láminas 16 y 17 homos estudiado la poliedros conjugado del dedica do e icosacdos aequelares, obtenido al tracar por les puntos medios de las acistas del político dado, recto perfendiculares at plane determinade por dichas aristas y el centro de aquel.

En la lanura 18 hours representado el polindo obtersido por la intersección de ambos conjugados.

En la presente l'amina 31 vanis a estudios el poliedro decidado de cambos conjugados cuando se unen encesidamente los extremes de cada dos aristas correspondientes, con lo cual obtenemos resubos todos ignales, que man las caras del poliedro pedido.

Previamente al estudio de su trassas, vamos a deducir las properdades geométrices de este policido decidado.

1º Todas sus caras son iguales y tienen la forma de combos.

En electo, en la travada grafica de la las la minas 16 a 18 puede deservaise que las avistas del icosardo son imagones que las de su doderandro conseguelo. Esto sude compretarse mualitramente modiante la firmula 30, lan. 4, y formula 43, lan. 5 signientes:



$$a_{12} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{1} \ell_{12}$$

despejando les g les, tendremis

Desarrollo del calculo auterior: | le = 4 = 4 = 4 = 4 = 12 =

$$=\frac{4(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{15-3}a_{12}=\frac{4(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{12}a_{12}=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}a_{12}$$

$$\begin{bmatrix} \ell_{20} = \frac{\lambda}{\sqrt{10 + 2 \sqrt{5}}} & a_{20} = \sqrt{\frac{10 - 2 \sqrt{5}}{5}} & a_{20} \end{bmatrix}$$

Desarrollo del cálculo auterior:
$$l_{20} = \frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} q_{20} = \sqrt{\frac{16}{10+2\sqrt{5}}} q_{20}$$

$$= \sqrt{\frac{16(10-2\sqrt{5})}{100-20}} \quad a_{2a} = \sqrt{\frac{16(10-2\sqrt{5})}{80}} \quad a_{2a} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}} \quad a_{2a}$$

en las que haciendo a12 = a20, y siendo

$$\frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{2} = 0.713644 - 2 \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{5}} = 1, \text{ or } 1462 - ...$$

$$\sqrt{\frac{10-215}{5}} > \frac{\sqrt{15-\sqrt{3}}}{2}$$

por la que rera

mayor motivo, cuando como en el en que que

a20 > a6



Les pues at est services et an entre correspondient. en les dos poliedros conjugados, son combos, todos iguales q caras del poliedros decivados

2º El primero de caras del poliedro derivado, será de 30

ten efects, en virtud de su generación, cade cara contieme una arista del doacendo, também etra del ecosardro; en ambes priciodos es de 30 el munero de sus aristas.

3ª Il menero de vértices del pludro dentado es de 32

Este ruimero sera el de la suma de los vértices del dodeca edro (20) y del icosa edro (12).

4ª El poliedro derivado es convexo

Pues al protonegar el plano de enalquiera de eus cacas, queda todo el en el mismo serviespacio.

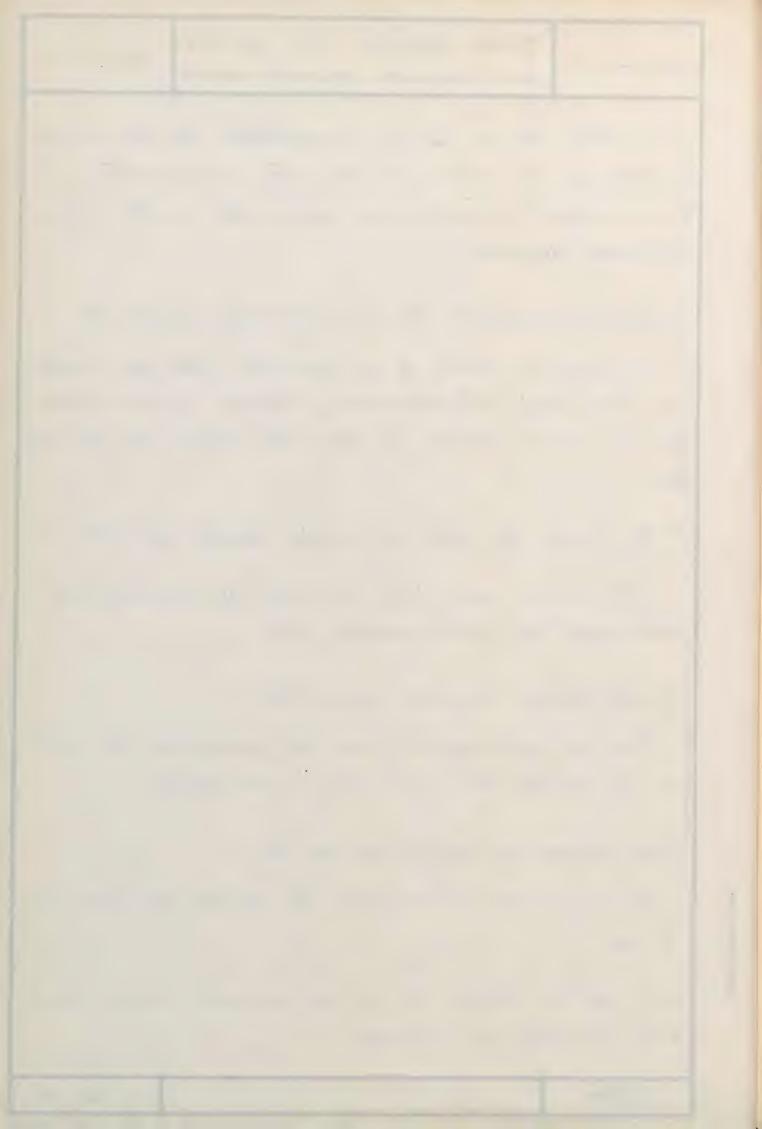
5ª El mimero de aristas rerà de 60

Por ser couvero se verificarà la celación de Euler, en

C+ V = A + 2

de la que re deduce A, ja que conscernos C=30 g V=32 Todas las aristas son áquales





puesto que en dicho vértices concurren respectivamente tres o cinco aristas de los poliedros conjugados. Así pues existiran en el poliedro derivado 20 ángulos sólidos triedros y 12 pentaedros.

La circurscrita al icosaedos dado

8º Existe una esfera, concentrica une la anierie y de tinta de esta, que pasa por los ovértices triedros

La circumenta al dodecaedro conjugado q de meror radio que la anterior.

9º Esciste una esfera, concentrica con las anteneres, tangente a las aristas, no en su punto medio.

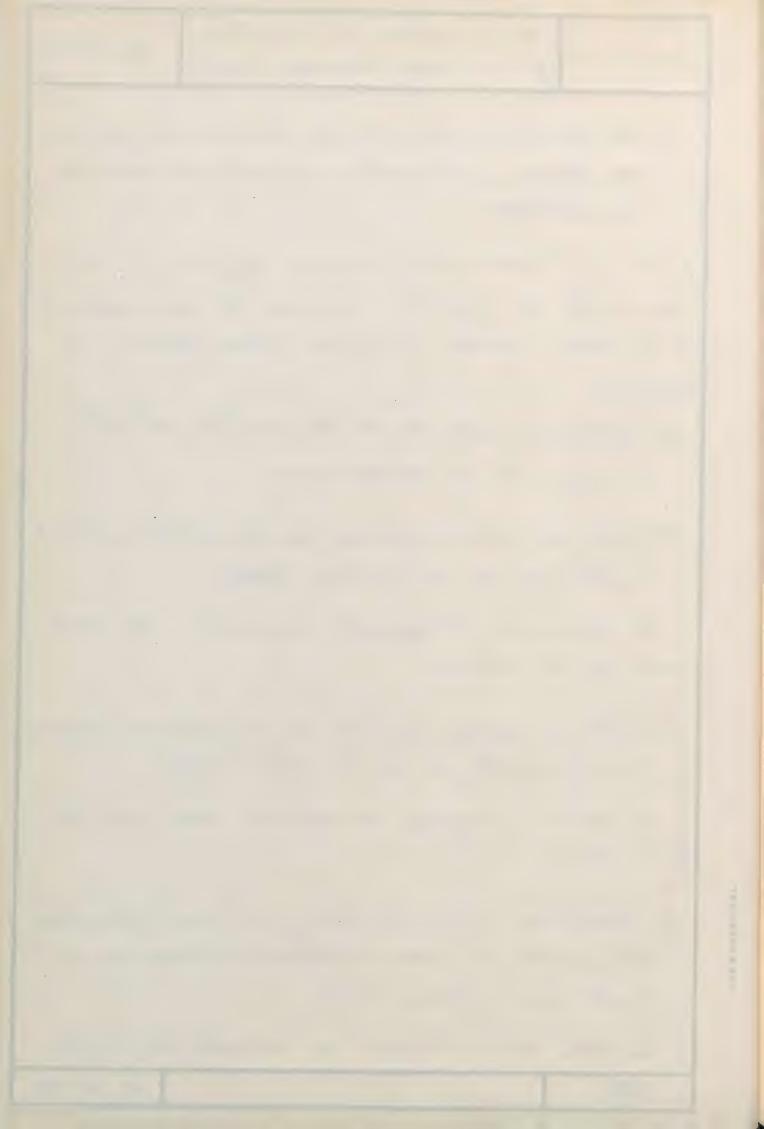
Es valida la anaisea demostración dada en la la-

10: Exciste una esfera, encentrica con las anteriores, tanquite a todas las caras del poliedro derivado, en el antro del cambo (esfera inscrita).

La essera convint tangente a las aristas de los dos

JCC

10 - 10 - 72



PRUCESO GRAFICO

nas previamente la vértices del icoccedos dado. ¿ requidemente los del dodecaedro conjugado.

A continuación bestará servir consecutivamente, formando um madrilatero (paralelogramo en las proyecciones), lo
estremos de sada dos aristas perpendendares correspondentes (ma de cada películo); estudiando en cada preyección la ministidad de las muistas del presentación de este.

per lo que ornitimos su repetición.

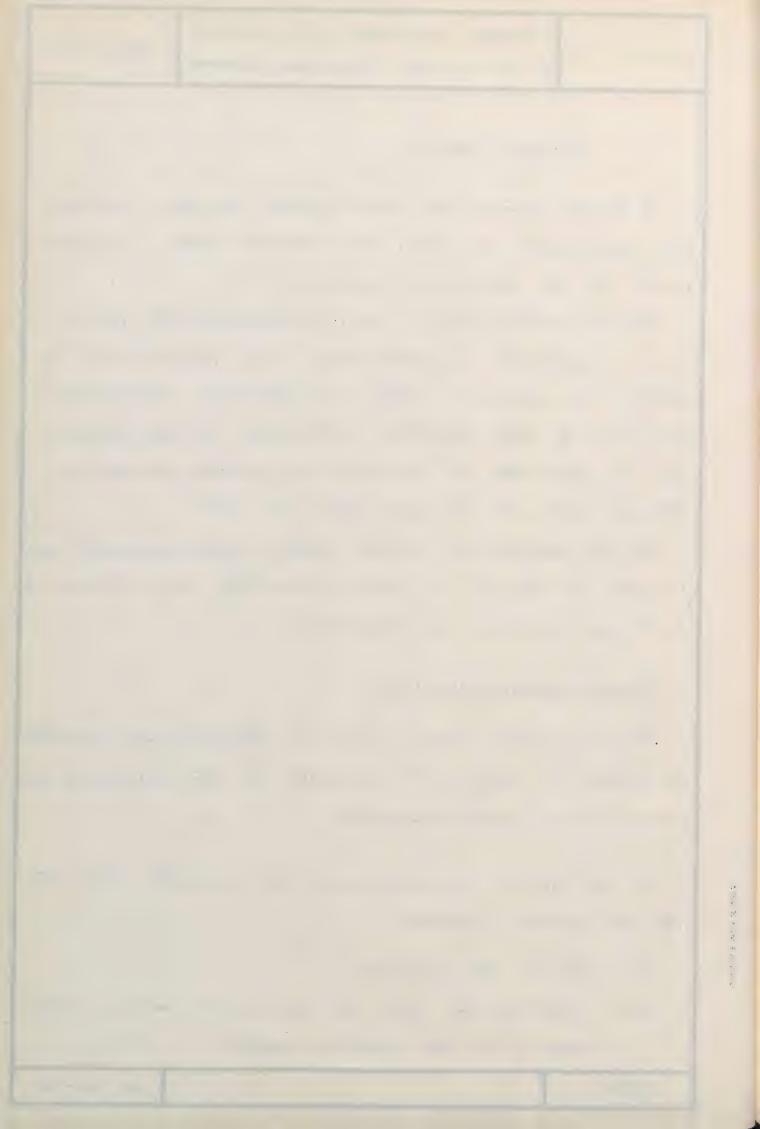
PROCESO GRAFICO- ANDLITICO

Sara rimplificar y dar al cuismo tiempo mayor escaclitud al harado, es muy sitil el empleo de cetas calculadas preriamente en forma analítica.

des del poliedro derivado:

- l = Arista del poliedro
- a, = Radio de la estera que pasa por los vértices pentaédrivos (los del icosaedro dado)





UNE A4 210 X 2

a. : Rode à le essera que pasa por los vértices triedros

b = Radio de la esfera tangente a las aristas.

c: Radio de la espera tangente a las most.

l, = Arista del icosaedro dado.

1 : Asista del dodecaedro conjugado.

En : Distancia entre les centres de des caras contiguas.

p: Distancia del centro de ma cara a uno de sus lados

24 = Angulo recliences del diedes formads por dos caraj

5. Inperficie lateral

V: Volumen.

función de a, , cadio de la esfera circumscrita al ico-

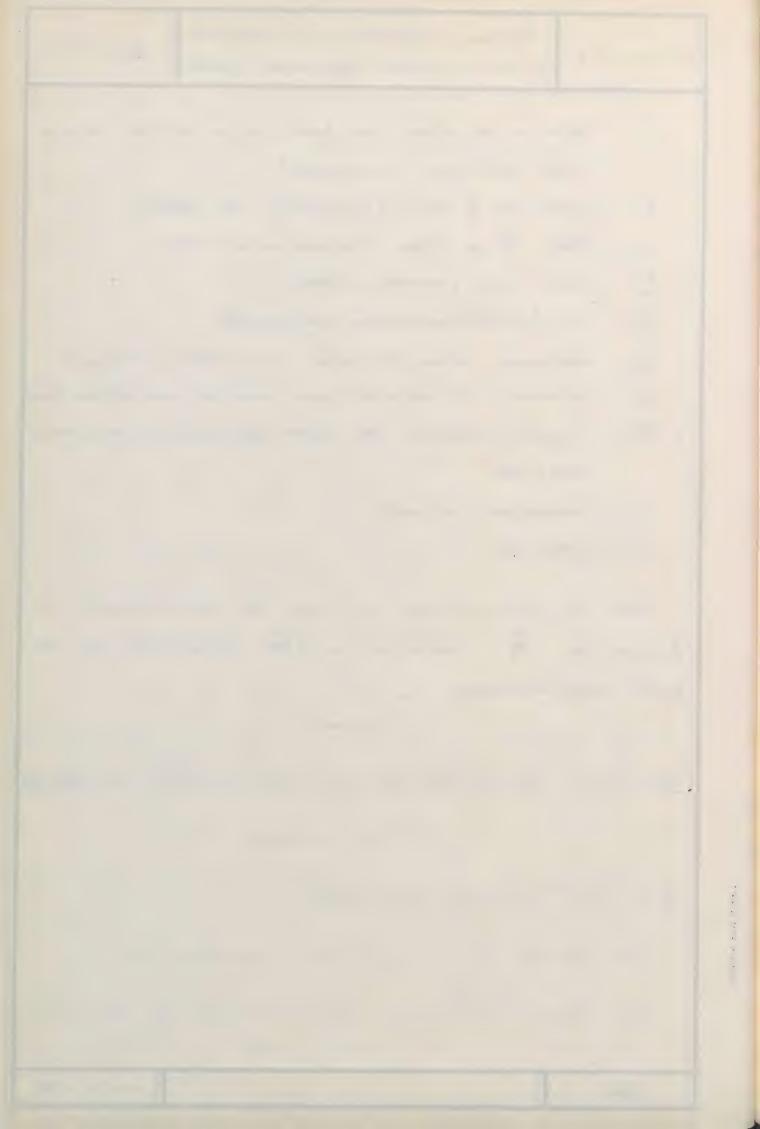
a, = Radio de las esfera que pasa por los mértices pentaédricos

Dato del ejercicio

l = Ariota del icosaedro dado

De la formula 165 de la l'amina 16, 20 obtient que

a, = 0 10 = \frac{15 + 215}{2} \langle 12 \q de la formula 164, que



Paris 10 5

$$\begin{bmatrix} \ell_{20} \end{bmatrix} = \underbrace{\ell'_{20}}_{2} = \underbrace{\frac{1+15}{2}}_{2} = \underbrace{\ell_{12}}_{2} = \underbrace{\frac{2}{5}}_{1+\frac{115}{5}} = \underbrace{\frac{2}{$$

Desarrollo del cálculo autorior:
$$l_{20} = \frac{i+15}{2} \times \frac{2}{\sqrt{5+25}} = a_1 =$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}} a_1 = \frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5+2\sqrt{5}} a_2 = \frac{(4+\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{25-20} a_1 = \frac{(25-20)}{25-20}$$

$$\frac{(5+5\sqrt{5}-2\sqrt{5}-10)\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5}a_{1}=\frac{(3\sqrt{5}-5)\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5}a_{2}=\frac{\sqrt{(5+2\sqrt{5})(3\sqrt{5}-5)^{2}}}{5}a_{3}=\frac{\sqrt{(5+2\sqrt{5})(3\sqrt{5}-5)^{2}}}{5}a_{4}=\frac{\sqrt{(5+2\sqrt{5})(3\sqrt{5}-5)^{2}}}{5}a_{4}=\frac{\sqrt{(5+2\sqrt{5})(3\sqrt{5}-5)^{2}}}{5}a_{4}=\frac{\sqrt{(5+2\sqrt{5})(3\sqrt{5}-5)^{2}}}{5}a_{5}=\frac{\sqrt{(5+2\sqrt{5}$$

$$= \frac{\sqrt{(5+2\sqrt{5})(45+25-30\sqrt{5})}}{5} a_1 = \frac{\sqrt{(5+2\sqrt{5})(70-30\sqrt{5})}}{5} a_1 = \frac{\sqrt{(5+2\sqrt{5})(70-30\sqrt{5})}}{5}$$

*
$$\sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(14-6\sqrt{5})}{5}} a_1 = \sqrt{\frac{2(5+2\sqrt{5})(7-3\sqrt{5})}{5}} a_4 = \sqrt{\frac{2(35+14\sqrt{5}-15\sqrt{5}-3c)}{5}} a_5 = \sqrt{\frac{2(35+14\sqrt{5}-3c)}{5}} a$$

$$= \sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{5}} a_1 = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}} a_1$$

1,2 = Arista del dodecaedro conjugado

de la formula 165, lan. 16, se deduce

$$a_1 = a'_{20} = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{2} l_{12}$$
 de donde

$$| l_{12} | = \frac{2}{\sqrt{5+2.15}} | a_1 | = \frac{2}{5} \sqrt{\frac{5-2.15}{5}} | a_1 |$$

Desarrollo del calculo auterior: $t_{12} = \frac{2}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}} \alpha_1 = \frac{2\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5+2\sqrt{5}} \alpha_1$

$$= \frac{2(5-2\sqrt{5})\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{25-20} a_1 = \frac{2\sqrt{(5+2\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})^2}}{5} a_2 = \frac{2\sqrt{(25-20)(5-2\sqrt{5})}}{5}$$

(50)



$$= \frac{2\sqrt{5(5-2\sqrt{5})}}{5} a_1 = 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} a_1$$

l = Saista del polición

les ; le som las diagonales del combo que forma una cara. por lo que (fig. 1)

$$\frac{1}{2} = \sqrt{\left(\frac{\ell_{20}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell_{12}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}} a_4\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} a_4\right)^2} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} a_4$$

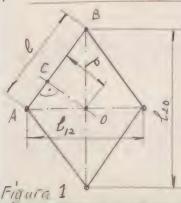
Desarrollo del calculo anterior:

$$l = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}a_{1}\right)^{2} + \left(\frac{1}{2}\times2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}a_{1}\right)^{2}} =$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4} \times \frac{10-2\sqrt{5}}{5} \times (a_4)^2 + \frac{5-2\sqrt{5}}{5} (a_4)^2} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10} + \frac{5-2\sqrt{5}}{5}} a_4 =$$

$$= \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5} + 10 - 4\sqrt{5}}{10}} \quad a_1 = \sqrt{\frac{15 - 5\sqrt{5}}{10}} \quad a_1 = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} \quad a_1$$

p = Distancia del centro de una cara a uno os sus lado



En la figura 1 hours representado una cara del poliedro pedido (rombo de diagonales los g lis). Tracemos por O la perpendicu-



lar al lado 18, viendo C el pie de la misma.

La ken gale motion pula A.V. a g ADC um conception laingulo C.A.o Comin), por lo que

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BO}}$$
 de donde $\overline{OC} = \frac{\overline{AO} \times \overline{BO}}{\overline{AB}}$

y sustitujendo los valores $\overline{OC} = \beta$, $\overline{AO} = \frac{\ell_{12}}{2}$, $\overline{BO} = \frac{\ell_{20}}{2}$, $\overline{AB} = \ell$,

tendremos:

por lo que

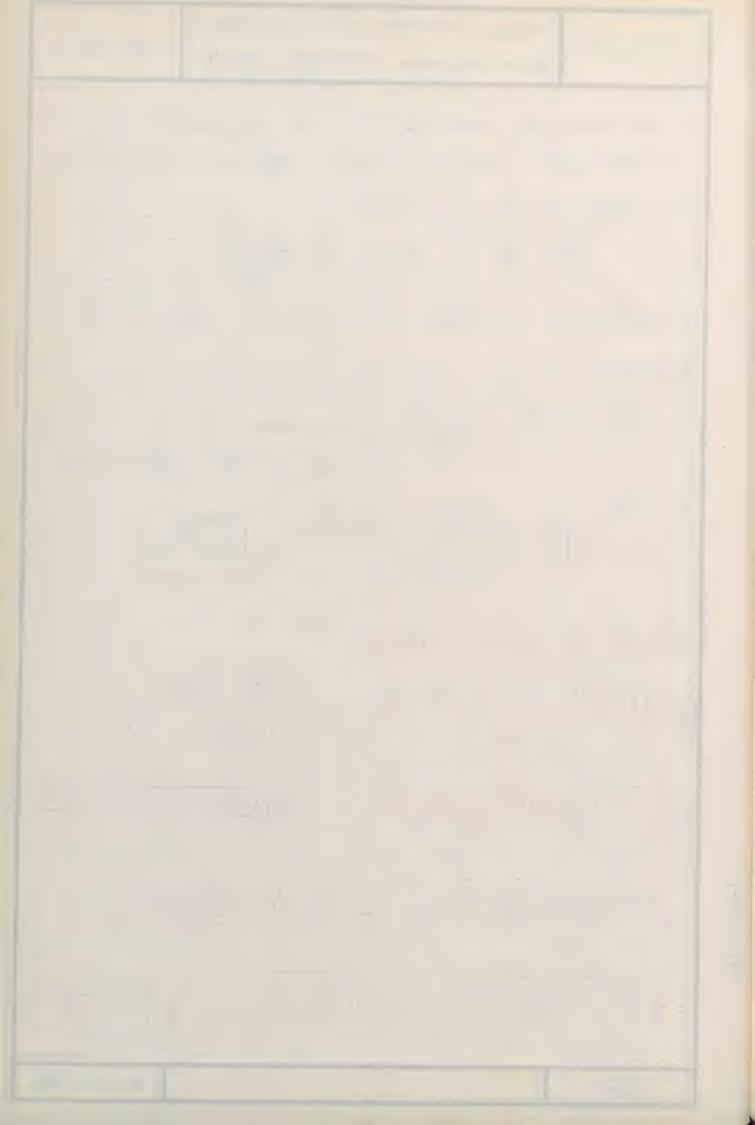
$$A = \frac{2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} a_1 \times \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}} a_1}{4\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} a_2} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{10}} a_1$$

Desarrollo del calculo auterior:

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{(5-2\sqrt{5})(10-2\sqrt{5})}{25}}, \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right)a_1=\frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{(5-2\sqrt{5})(10-2\sqrt{5})}{25}}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{2(5-2\sqrt{5}) \cdot 2(5-\sqrt{5})}{25(3-\sqrt{5})}} a_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \times \sqrt{\frac{(5-2\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{3-\sqrt{5}}} a_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \times \sqrt{\frac{(5-2\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{3-\sqrt{5}}} a_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \times \sqrt{\frac{(5-2\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{3-\sqrt{5}}} a_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \times \sqrt{\frac{(5-2\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{3-\sqrt{5}}} a_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \times \sqrt{\frac{(5-2\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{3-\sqrt{5}}} a_5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \times \sqrt{\frac{(5-2\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}} a_5 = \frac{1}{2} \cdot \frac$$

$$= \frac{1}{5} \sqrt{\frac{25 - 10\sqrt{5} - 5\sqrt{5} + 10}{3 - \sqrt{5}}} \quad \alpha_{1} = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{35 - 15\sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}} \alpha_{1} = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{5(7 - 3\sqrt{5})}{3 - \sqrt{5}}} \alpha_{1}$$



$$=\frac{1}{5}\sqrt{\frac{5(7-3\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{4}}a_{1}=\frac{1}{10}\sqrt{5(21-9\sqrt{5}+7\sqrt{5}-15)}a_{1}=$$

$$= \frac{1}{10} \sqrt{5(6-2\sqrt{5})} a_1 = \frac{1}{10} \sqrt{10(3-\sqrt{5})} a_1 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{10}} a_1$$

a = Radio de la esfera que pasa por los ve teres triedros

Es el radio de la esfera circumscrita al dodecaedro conjugado de lato biz, siendo el valor de este, en puncion de a,

y terriendo en eventa la firm. 30, la

$$a_2 = a_{12} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4} l_{12} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4} \times 2\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}} a_1 = \sqrt{\frac{3(5 - \sqrt{5})}{10}} a_1$$

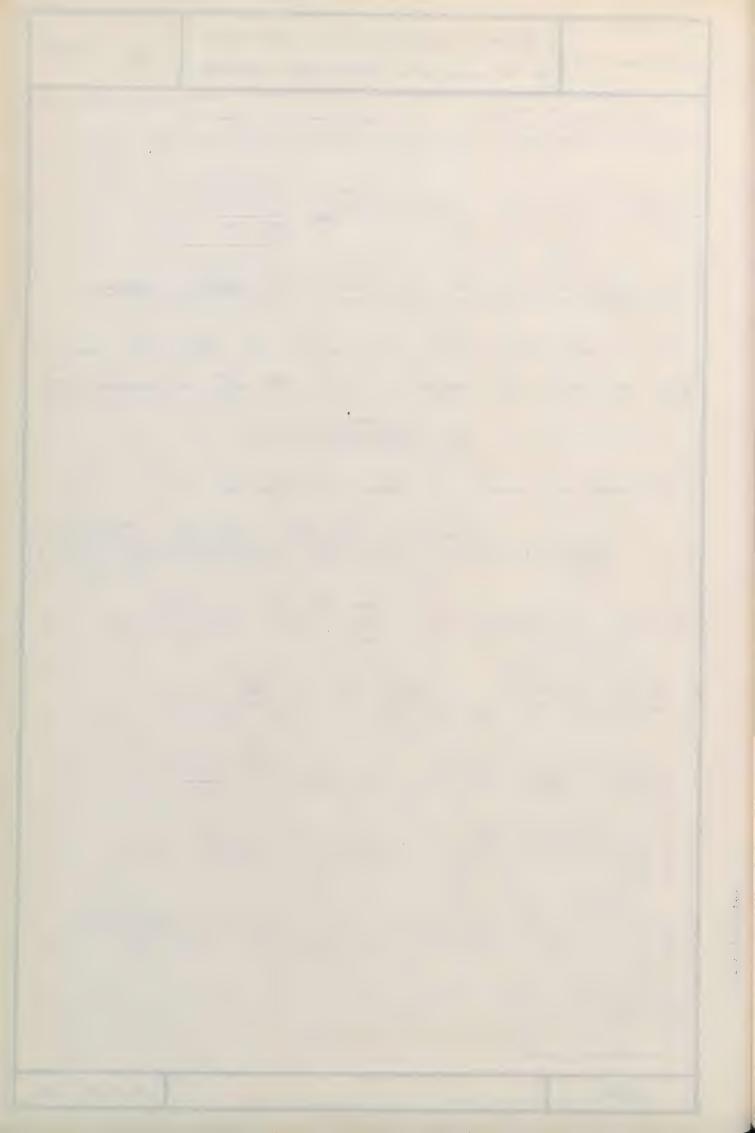
Desanollo del calculo autenis: az = VIS + V3 = 2 V 5-2 VS a = =

$$= \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{2} \times \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} \alpha_{1} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sqrt{15} + \sqrt{3})^{2} \times \frac{5-2\sqrt{5}}{5}} \alpha_{1} =$$

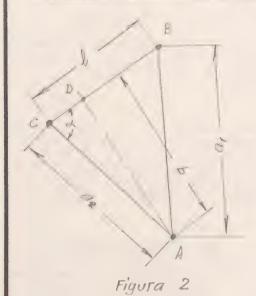
$$\frac{1}{2}\sqrt{(15+3+2\sqrt{45})} \times \frac{5-2\sqrt{5}}{5} \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}\sqrt{(18+6\sqrt{5})} \times \frac{5-2\sqrt{5}}{5} \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}\sqrt{(18+6\sqrt{5})} \times \frac{5-2\sqrt{5}}{5}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{6(3+\sqrt{5})} \times \frac{5-2\sqrt{5}}{5} \alpha_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{6}{5}(3+\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})} \alpha_1 =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{6}{5} \left(15 + 5\sqrt{5} - 6\sqrt{5} - 10\right)} \quad \alpha_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{6}{5} \left(5 - \sqrt{5}\right)} \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{6}{5} \left(5 - \sqrt{5}\right)} \quad \alpha_3 = \sqrt{\frac{6}{5} \left(5 - \sqrt{5}\right)} \quad \alpha_4 = \sqrt{\frac{6}{5} \left(5 - \sqrt{5}\right)} \quad \alpha_5 = \sqrt{\frac{6}{5} \left(5 - \sqrt{5}\right)} \quad \alpha$$



b = Reduce de la cofina tongent a la anches.



L'ég. 21 de una arista del polis.

dro derivado, con el centro A de

su estera escercista, se mo. lomara el triangulo A.B.C. de lado CB = l; AC = a, p AE = a.

La altura AD = b, correspon
diente al lado L, será el radio

pedido, por lo que

b = az 2eu x

(1)

El valor del angulo x, re deduce de la formula tri-

 $(a_1)^2 = (a_2)^2 + \ell^2 - 2 a_2 \ell \cos \alpha$

de la que

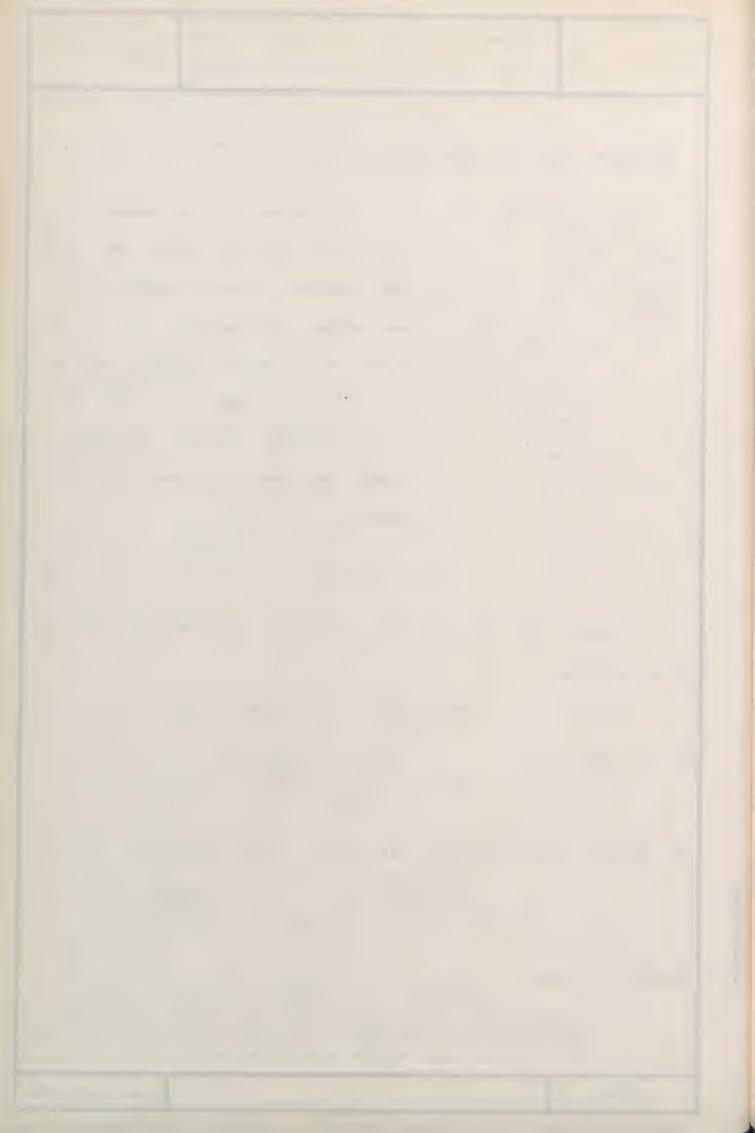
 $cos d = \frac{(a_2)^2 + l^2 - |a_1|^2}{2a_2 l}$

en la que sustituyends los valores ya deducidos de $a_5 = \sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}} a_1$ a_1 $a_2 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} a_1$

tendremos que

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{3[5-\sqrt{5}]}{10}} \ a_{1}\right)^{2} + \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \ a_{1}\right)^{2} - \left(a_{1}\right)^{2}}{2\sqrt{\frac{3[5-\sqrt{5}]}{10}} \ a_{1} \times \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \ a_{1} = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{15}} \ a_{1}$$

CES



Desarrollo del ediculo auteria:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha \end{bmatrix} = \frac{\left(\sqrt{\frac{3(s-\sqrt{s})}{10}} a_1\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{s}}{2}} a_1\right)^2 - \left(a_1\right)^2}{2\sqrt{\frac{3(s-\sqrt{s})}{10}} a_1 \cdot \sqrt{\frac{3-\sqrt{s}}{2}} a_1} = \frac{2\sqrt{\frac{3(s-\sqrt{s})}{10}} a_1 \cdot \sqrt{\frac{3-\sqrt{s}}{2}} a_1}{2\sqrt{\frac{3-\sqrt{s}}{10}} a_1} = \frac{2\sqrt{\frac{3(s-\sqrt{s})}{10}} a_1 \cdot \sqrt{\frac{3-\sqrt{s}}{2}} a_1}{2\sqrt{\frac{3-\sqrt{s}}{10}} a_1} = \frac{2\sqrt{\frac{3(s-\sqrt{s})}{10}} a_1 \cdot \sqrt{\frac{3-\sqrt{s}}{2}} a_1}{2\sqrt{\frac{3-\sqrt{s}}{10}} a_1} = \frac{2\sqrt{\frac{3(s-\sqrt{s})}{10}} a_1 \cdot \sqrt{\frac{3-\sqrt{s}}{2}} a_1}{2\sqrt{\frac{3(s-\sqrt{s})}{10}} a_1 \cdot \sqrt{\frac{3-\sqrt{s}}{2}} a_1} = \frac{2\sqrt{\frac{3(s-\sqrt{s})}{10}} a_1 \cdot \sqrt{\frac{3-\sqrt{s}}{2}} a_1}{2\sqrt{\frac{3(s-\sqrt{s})}{10}} a_1 \cdot \sqrt{\frac{3-\sqrt{s}}{2}} a_1} = \frac{2\sqrt{\frac{3(s-\sqrt{s})}{10}} a_1 \cdot \sqrt{\frac{3-\sqrt{s}}{2}} a_1}{2\sqrt{\frac{3(s-\sqrt{s})}{10}} a_1 \cdot \sqrt{\frac{3-\sqrt{s}}{2}} a_1} = \frac{2\sqrt{\frac{3(s-\sqrt{s})}{10}} a_1 \cdot \sqrt{\frac{3-\sqrt{s}}{2}} a_1}{2\sqrt{\frac{3(s-\sqrt{s})}{10}} a_1 \cdot \sqrt{\frac{3-\sqrt{s}}{2}} a_1} = \frac{2\sqrt{s}}{2\sqrt{\frac{3(s-\sqrt{s})}{10}} a_1 \cdot \sqrt{\frac{3-\sqrt{s}}{2}} a_1}} = \frac{2\sqrt{s}}{2\sqrt{\frac{3(s-\sqrt{s})}{10}}} = \frac$$

$$= \frac{3(5-\sqrt{5})}{10} (a_1)^2 + \frac{3-\sqrt{5}}{2} (a_1)^2 - (a_1)^2 \frac{15-3\sqrt{5}}{10} + \frac{3-\sqrt{5}}{2} - 1$$

$$= \frac{2\sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{20}} (a_1)^2}{2\sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{20}}}$$

$$\frac{15 - 3\sqrt{5} + 15 - 5\sqrt{5} - 10}{10} = \frac{20 - 8\sqrt{5}}{10} = \frac{10 - 4\sqrt{5}}{5}$$

$$\sqrt{\frac{3(5 - 1/5)}{5}} = \sqrt{\frac{3(20 - 2\sqrt{5})}{5}}$$

$$\frac{2(5-2\sqrt{5})}{5} = \frac{\frac{2}{5}(5-2\sqrt{5})}{2\sqrt{\frac{3}{5}(5-2\sqrt{5})}} = \frac{1}{5} \times \frac{(5-2\sqrt{5})}{\sqrt{\frac{3}{5}(5-2\sqrt{5})}} = \frac{1$$

$$\frac{1}{5} \times \sqrt{\frac{(5-2\sqrt{5})^2}{\frac{3}{5}}(5-2\sqrt{5})} = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{5(5-2\sqrt{5})}{3}} = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{15}}$$

Je aqui re deduce que

$$| sen | d = \sqrt{1 - cos^2 d} = \sqrt{1 - (\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{15}})^2} = \sqrt{\frac{2(5 + \sqrt{5})}{15}}$$

Desarrollo del calculo anterior: pen & = \1-\(\begin{pmatrix} 5-2\sqrt{5}\\ 15\\end{pmatrix} =

$$= \sqrt{1 - \frac{5 - 2\sqrt{5}}{15}} = \sqrt{\frac{15 - 5 + 2\sqrt{5}}{15}} = \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{15}} = \sqrt{\frac{2(5 + \sqrt{5})}{15}}$$

Natur que sustitues en la expreseri inicial (1), mos de

(59

18 - 10 - 72



$$b = a_2 \text{ sen } \alpha = \sqrt{\frac{3(5-15)}{10}} a_1 \times \sqrt{\frac{2(5-15)}{15}} = \boxed{\frac{e\sqrt{5}}{5}} a_4$$

Tesavrollo del calculo auterior:

$$\begin{bmatrix} b & \sqrt{3(5-15)} & a_1 & \sqrt{2(5+15)} & -\sqrt{3\times2\times(5-15)(5+15)} \\ -\sqrt{20} & a_1 & -\sqrt{5} & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \\ -\sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \\ -\sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \\ -\sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \\ -\sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \\ -\sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \\ -\sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \\ -\sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \\ -\sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \\ -\sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \\ -\sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \\ -\sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \\ -\sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \\ -\sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \\ -\sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \\ -\sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \\ -\sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \\ -\sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \\ -\sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \\ -\sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \\ -\sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \\ -\sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \\ -\sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \\ -\sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \\ -\sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \\ -\sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \\ -\sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \\ -\sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \\ -\sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \\ -\sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \\ -\sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \\ -\sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \\ -\sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \\ -\sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \\ -\sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \\ -\sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \\ -\sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \\ -\sqrt{3} & 2\times(5-15)(5+15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\times(5-15)(5$$

c - Radio de la esfera tangente a las caras

Es ignal al cadio de la esfera tangente a las suitas de uno de los poliedros dados.

Comando como base el dodecardo, su arista, determinada anteriormente en funcion de 9, es

$$l_{12} = 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} a_1$$

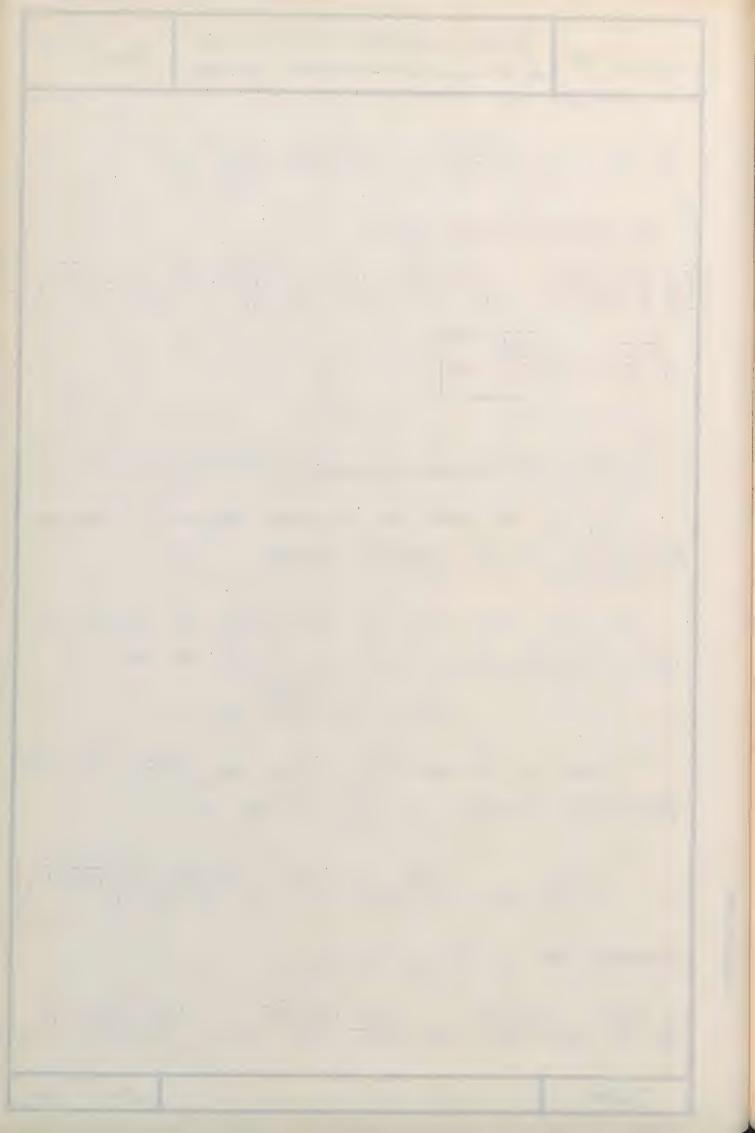
y el radio de la esfera tangente a las aristas de este dodecaedro, valdrá (ver form. 31, lam. 4)

$$C = b_{12} = \frac{3 + \sqrt{5}}{4} l_{12} = \frac{3 + \sqrt{5}}{4} \times 2 \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}} a_1 = \sqrt{\frac{(5 + \sqrt{5})}{10}} a_1$$

Desarrollo del calculo auterior:

$$C = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \times 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} \quad a_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} \quad a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(5-2\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^2}{5}} \quad a_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} \quad a_4 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} \quad a_5 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} \quad a_5$$

(79-



 $=\frac{i}{2}\sqrt{(5-2\sqrt{5})(9+5+6\sqrt{5})}a_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(5-2\sqrt{5})(14+6\sqrt{5})}{5}a_1=\frac{i}{2}\sqrt{\frac{2(5-2\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})}{5}a_2}}=$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(35-14\sqrt{5}+15\sqrt{5}-30)}{5}}a_{4}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})}{5}}a_{1}=\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}}a_{1}$$

tit a mo vais. . obtain particule del invocato auga

$$\ell_{20} = \sqrt{\frac{10 - 215}{5}} a_{1}$$

y de dis de la espera tangente (ver form. 44. Lan. 5)

$$C = b_{20} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \quad \ell_{20} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \times \sqrt{\frac{10 - 5\sqrt{5}}{5}} \quad \alpha_1 = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} \quad \alpha_1$$

Jesavrollo del calculo anterior: $C = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \times \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}} a_4 =$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}{5}}a_1=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})(1+5+2\sqrt{5})}{5}}a_1=$$

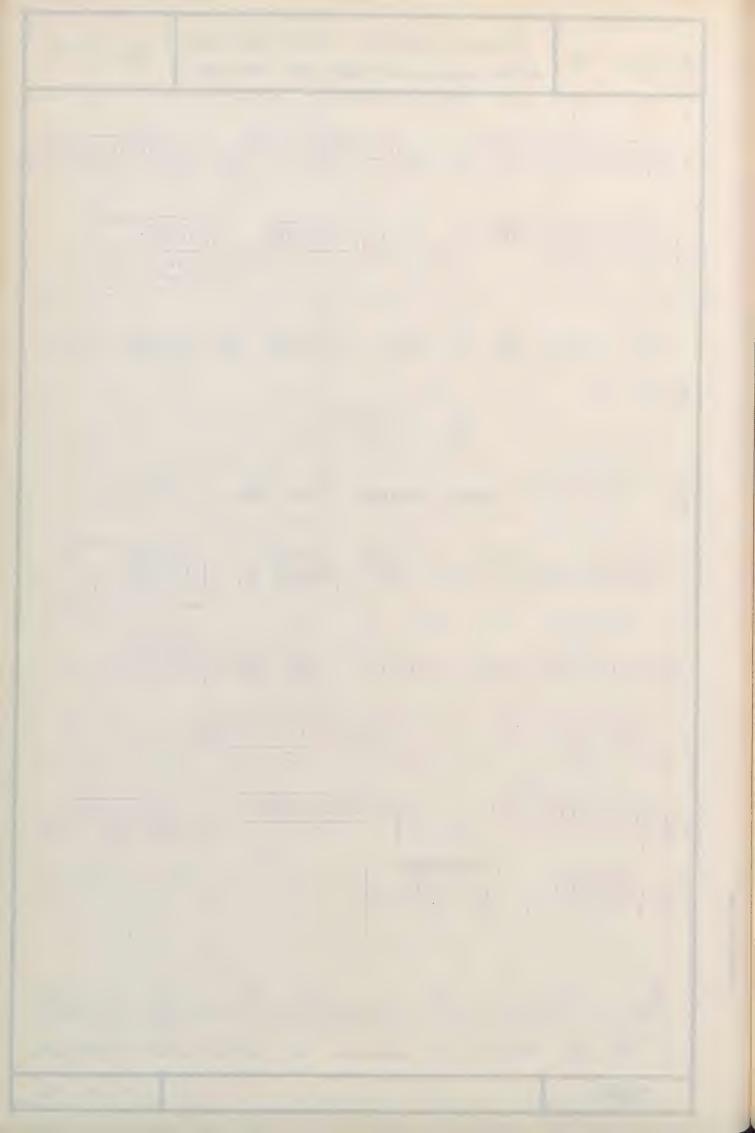
$$=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{4(5-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{5}}a_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15-3\sqrt{5}+5\sqrt{5}-5}{5}}a_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}a_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}a_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}a_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}a_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}a_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}a_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}a_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}a_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}a_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}a_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}a_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}a_3=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}a_4=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}a_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}a_3=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}a_4=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}a_4=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}a_4=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}a_4=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}a_4=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}a_4=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}a_4=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}a_4=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}a_4=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}a_4=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}a_4=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}a_4=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}a_4=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}a_4=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}a_4=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}a_4=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}a_4=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}a_5=\frac{10+2\sqrt{5}}{5}a_5=\frac{10+2\sqrt{5}}{5}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})}{5}}a_{1}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}a_{1}$$

l_{IV} = Distancia entre los centros de des caras contiguas

Én il estudio que hicimos en la lamina 18 del polie-

UNE A4 210 X



dro obtenido por la interrección del dodecaedro e ección comina a comjugados por sus aristas, vinnos que el sólido comuin a combos es un poliedro mo regular, convexo, compuesto de 12 pentágonos regulares y 20 trianquelos equilateros de lado. de
igual longitud.

denominados "Poliedros arquimedianos" y la hemos desegmado con el nombre de "Inquimediano II".

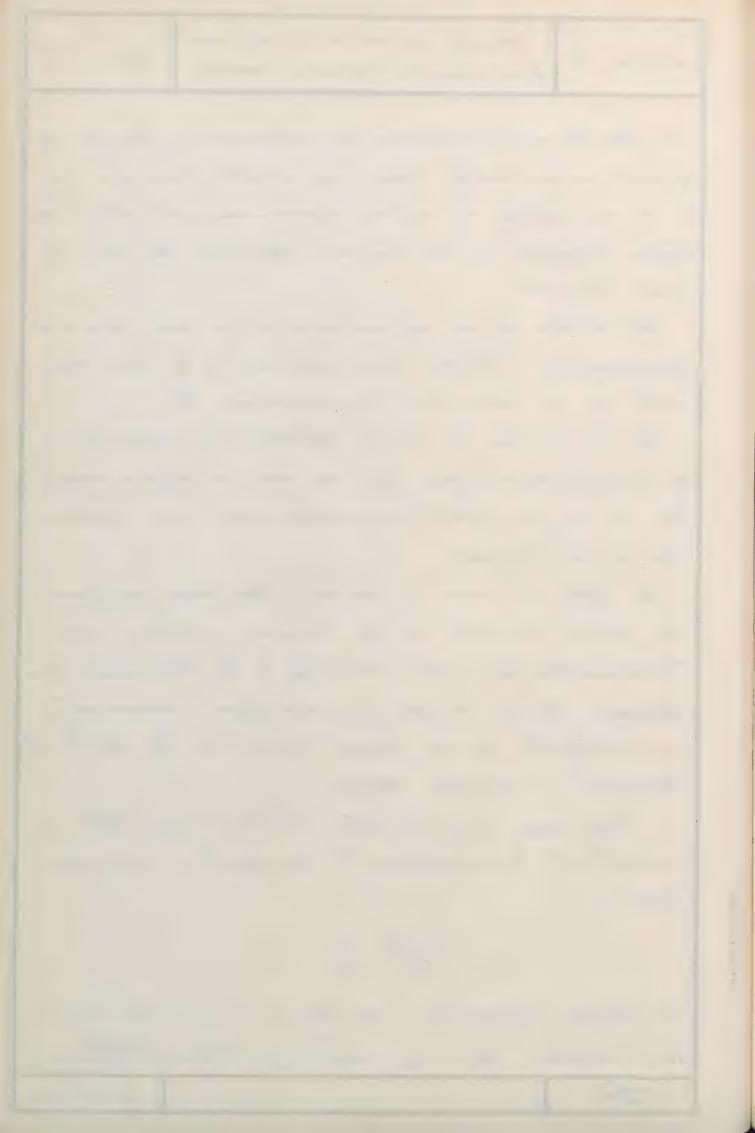
de dicho Arquimediano II, así sono el ratendo analitico de seu princepales magnitudes que tienen aplicación a este ejercicio.

En efecto, al unir los centros de dos caras contiguas del joriedro estudiado en esta lamina, se obtiene un "Anquimediano II" enyo lado los es la dimensión que descarvos obtener ahora, o enya esfera ircumscrita es coincidente con la esfera tangente a las aristas del dodecaedro e icosaedro dados.

Mas como por otra parte el radio de la esfera incuenscula al Arquimediano IV es ignal a lor lam. :foram.)

$$a_{JV} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \ell_{JV}$$

20 verificani iqualmente per lam. 16. form. 166), en lunain del insaedro: $a_{IV} = b_{20} = \frac{3+15}{4} b_{12} = \frac{3+15}{4} \times 2\sqrt{\frac{5-215}{5}} a_{4}$



por le que innealando expresents

$$\ell_{1V} = \frac{3+V_5}{4} \times 2 \sqrt{\frac{5-2V_7}{5}} \qquad \alpha_1 = \sqrt{\frac{5-V_7}{10}} \quad \alpha_1$$

Desarrollo del calculo auterior:

$$|| \frac{3+\sqrt{5}}{4} \times 2| \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} = a_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = a_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{3+\sqrt{r}}{2} \sqrt{\frac{2(5-2\sqrt{r})}{5(3+\sqrt{r})}} a_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2(5-2\sqrt{r})(3+\sqrt{r})^2}{5(3+\sqrt{r})}} a_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2(5-2\sqrt{r})(3+\sqrt{r})}{5(3+\sqrt{r})}} a_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2(5-2\sqrt{r})(3+\sqrt{r})}{5(3+\sqrt{r})}} a_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2(5-2\sqrt{r})(3+\sqrt{r})}{5(3+\sqrt{r})}} a_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2(5-2\sqrt{r})(3+\sqrt{r})}} a_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2(5-2\sqrt{r})(3+\sqrt{r})}{5(3+\sqrt{r})}} a_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2(5-2\sqrt{r})(3+\sqrt{r})}} a_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2(5-2\sqrt{r})(3+\sqrt{r})}{5(3+\sqrt{r})}} a_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2(5-2\sqrt{r})(3+\sqrt{r})}} a_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2(5-2\sqrt{r})(3+\sqrt{r})}} a_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2(5-2\sqrt{r})(3+\sqrt{r})}} a_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2(5-2\sqrt{r})}}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{5} (5-2\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} \ a_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{5} (15-6\sqrt{5}+5\sqrt{5}-10)} \ a_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{5} (15-6\sqrt{5}+5\sqrt{5}-10)} \ a_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{5} (15-6\sqrt{5}+5\sqrt{5}-10)} \ a_4 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{5} (15-6\sqrt{5}+5\sqrt{5}-10)} \ a_4 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{5} (15-6\sqrt{5}+5\sqrt{5}-10)} \ a_5 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{5} (15-6$$

$$= \sqrt{\frac{1}{10} (5 - \sqrt{5})} a_1 = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} a_1$$

Il mismo resultado Merariamios tomando el 14die de la estera tangente a la arista del doderno.

Entonces tendriames (ver lam. 17, form. 183)

$$a_{1V} = b_{12}^{\prime} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \ell_{20} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \times \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{5}} a_{1}$$



qui instancente con le

no permite despejas liv. aci.

$$|\mathcal{L}_{IV}| = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}} \quad \alpha_1 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \quad \alpha_2$$

Desarrollo del calculo anterior:

$$| l_{IV} | = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}} \qquad \alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{5}} \frac{3+\sqrt{5}}{2} \alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{4} \sqrt{\frac{4(5-\sqrt{5})}{5(3+\sqrt{5})}} a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{5(3+\sqrt{5})}} a_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}{5(3+\sqrt{5})}} a_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}{5(3+\sqrt{5})}} a_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}{5(3+\sqrt{5})}} a_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}{5(3+\sqrt{5})}} a_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}} a_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}} a_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}} a_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}}} a_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}} a_3 = \frac{(5-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})} a_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}} a_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}}} a_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}} a$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(3+5+2\sqrt{5})}{5(3+\sqrt{5})}}a_{1}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{5(3+\sqrt{5})}}a_{1}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}(5-\sqrt{5})}a_{1}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}(5-\sqrt{5})}a_{1}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}(5-\sqrt{5})}a_{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}(5-\sqrt{5})}a_{1}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}(5-\sqrt{5})}a_{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}(5-\sqrt{5})}a_{1}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}(5-\sqrt{5})}a_{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}(5-\sqrt{5})}$$

$$=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\alpha_1$$

valor coincidente con el anterior

24 = Angulo rectilines del diedro formado por dos caaas contiguas.

consideramos el diedro formado por dos caras contiarista cualquiera del pliedo decistado,



ta, que que al mismo tiempo por el imbo de una de las caras, dicho plano pasara igualmente por el cuiro de la stace (hodos las caras son equales); las escres es de dicho plano con los dos caras, peran la lados de angulo rectitivos del dicho.

L'umi es reproducente les esses à la des caras, se

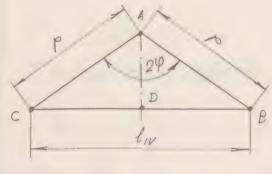


Figura 3

mes formara un treammine ungceles A. L.C. (fig. 3), cuya base C.B. es la magnitud "l_W", ya calculada, y los lados igua les la distancia del centro de la cara a la arista (fig. 2), o sea la magnitud p tam-

bien obtenida anterioremente. El argails A opuesto a la base, será el buscado, por lo que

Desarrollo del calculo auterior: $\sum_{i=1}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} a_i$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 \cdot \sqrt{5}}{10} \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{10}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 \cdot \sqrt{5}}{3 \cdot \sqrt{5}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(5 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15 - 3\sqrt{5} + 5\sqrt{5} - 5}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$$



Lu Halo ou merico cora

$$new \ \ \forall = \frac{1}{2} \ \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2} \ \sqrt{\frac{7.33}{2}} = \frac{1}{2} \ \sqrt{\frac{3.61}{2}} = \frac{$$

$$+\frac{1}{2}$$
 $\frac{1}{4}$ $\frac{3.61}{80}$ $\frac{33}{99}$ $\frac{99}{2}$ $\frac{0.558}{2}$ $\frac{4727}{2}$ $\frac{23}{7}$, 938 $\frac{20}{63}$ $\frac{63}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{20}{1}$

S = In fice latered

El area S, de una cara (rombo) se deduce de sus diagonales (fig. 1) y sera:

$$|S_1| = \frac{l_{12} \times l_{20}}{2} = \frac{2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} a_1 \times \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}} a_2}{2} = \frac{3\sqrt{5}-5}{5} (a_1)^2$$

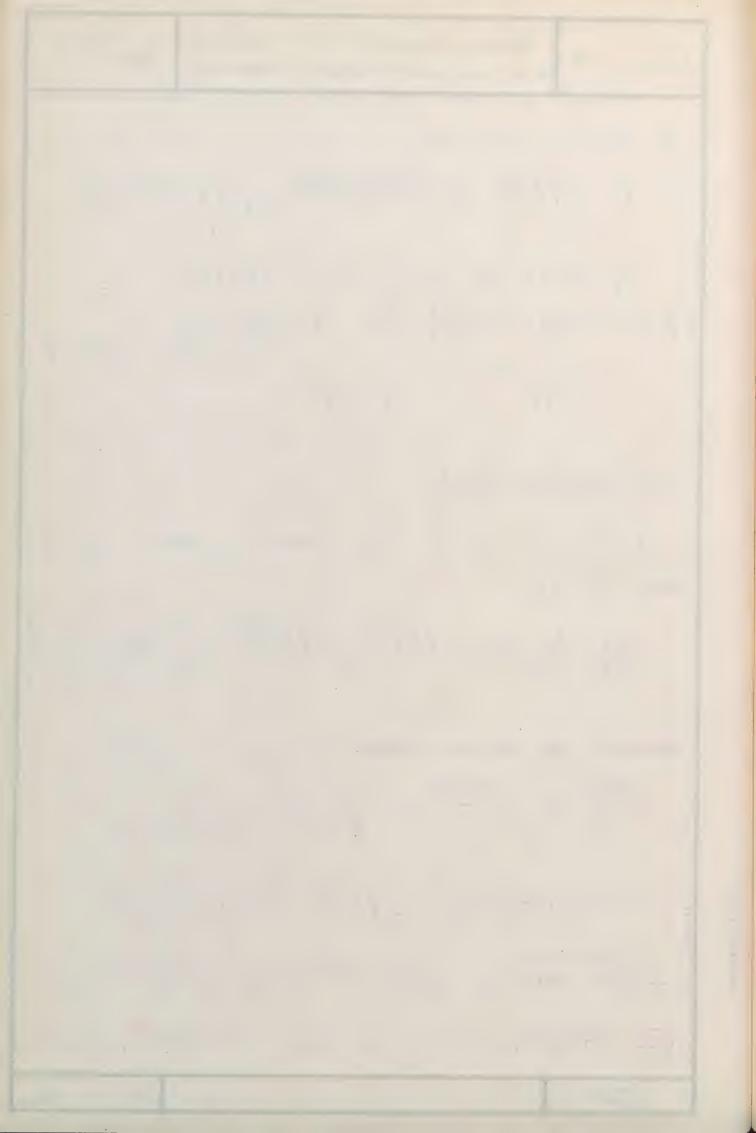
Desarrollo del calcuto auterior:

$$S_1 = \frac{2\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{5} a_1 \times \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}} a_4 = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} \times \frac{10-2\sqrt{5}}{5} (a_4)^2 =$$

$$=\frac{1}{5}\sqrt{2(5-2\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}(a_1)^2=\frac{1}{5}\sqrt{2(25-10\sqrt{5}-5\sqrt{5}+10)}(a_1)^2=$$

$$= \frac{1}{5} \sqrt{2(35-15\sqrt{5})} (a_1)^2 = \frac{1}{5} \sqrt{2\times5(7-3\sqrt{5})} (a_1)^2 = \sqrt{\frac{2(7-3\sqrt{5})}{5}} (a_1$$

=
$$\sqrt{\frac{2}{5}} \times \sqrt{7-3\sqrt{5}} (a_1)^2 = \int por ser + 4^2 - (3\sqrt{5})^2 = 4$$
, tendrem



$$= \sqrt{\frac{2}{5}} \times \left(\sqrt{\frac{q}{2}} - \sqrt{\frac{5}{2}}\right) \left(a_{1}\right)^{2} = \left(\sqrt{\frac{18}{10}} - \sqrt{\frac{10}{10}}\right) \left(a_{1}\right)^{2} = \left(\sqrt{\frac{q}{5}} - 1\right) \left(a_{1}\right)^{2} = \left(\frac{3}{5} - 1\right) \left(a_{1}\right)^{2} = \left(\frac{3}{5} - 1\right) \left(a_{1}\right)^{2} = \left(\frac{3}{5} - 1\right) \left(a_{1}\right)^{2} = \frac{3\sqrt{5} - 5}{5} \left(a_{1}\right)^{2}$$

$$= \left(\sqrt{\frac{3}{5}} - 1\right) \left(a_{1}\right)^{2} = \left(\frac{3\sqrt{5}}{5} - 1\right) \left(a_{1}\right)^{2} = \frac{3\sqrt{5} - 5}{5} \left(a_{1}\right)^{2}$$

$$= \left(\sqrt{\frac{3}{5}} - 1\right) \left(a_{1}\right)^{2} = \left(\sqrt{\frac{3\sqrt{5}}{5}} - 1\right) \left(a_{1}\right)^{2} = \frac{3\sqrt{5} - 5}{5} \left(a_{1}\right)^{2}$$

$$= \left(\sqrt{\frac{3}{5}} - 1\right) \left(a_{1}\right)^{2} = \left(\sqrt{\frac{3\sqrt{5}}{5}} - 1\right) \left(a_{1}\right)^{2} = \frac{3\sqrt{5} - 5}{5} \left(a_{1}\right)^{2}$$

$$= \left(\sqrt{\frac{3}{5}} - 1\right) \left(a_{1}\right)^{2} = \left(\sqrt{\frac{3\sqrt{5}}{5}} - 1\right) \left(a_{1}\right)^{2} = \frac{3\sqrt{5} - 5}{5} \left(a_{1}\right)^{2} = \frac$$

V = Volumen

Li considerames unides les vértices de una cara con el centro de la esfera circumscrita al poliedro derivado, el mos formará una pirámide recta de base resuleixa y altura ignal al radio c de la esfera inscrita. El volumere V, de dicha piramide sera pues

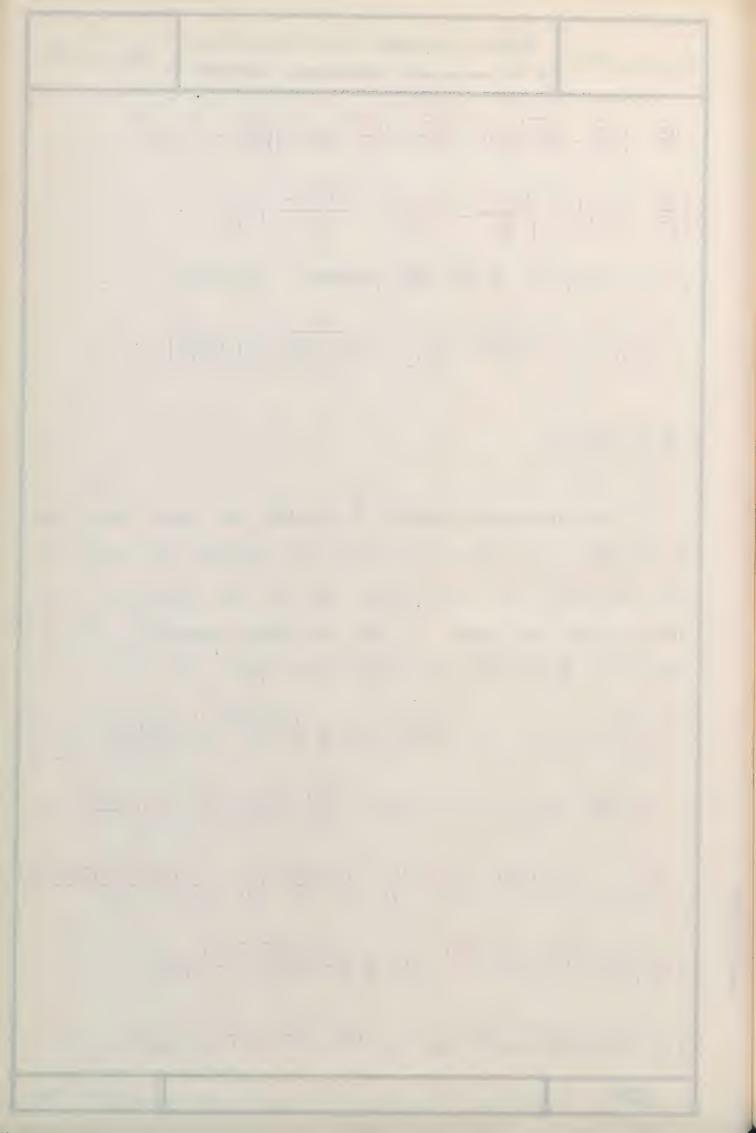
$$V_1 = S_1 \times \frac{1}{3} C = \left(\frac{3\sqrt{5} - 5}{5} (a_1)^2\right) \times \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} (a_1) = \frac{2}{15} \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} |a_1|^3$$

Desarrollo del calculo auterior: V_4 : $\left[\frac{3\sqrt{5}-5}{5}\left(a_4\right)^2\right] \times \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\left(a_4\right) =$

$$=\frac{3\sqrt{5-5}}{5}\times\frac{1}{3}\times\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\left(a_{1}\right)^{3}=\frac{3\sqrt{5-5}}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}}\left(a_{1}\right)^{3}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}\left(3\sqrt{5-5}\right)^{2}}\left(a_{1}\right)^{3}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}\left(3\sqrt{5-5}\right)^{2}}\left(a_{1}\right)^{3}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}\left(3\sqrt{5-5}\right)^{2}}\left(a_{1}\right)^{3}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}\left(3\sqrt{5-5}\right)^{2}}\left(a_{1}\right)^{3}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}\left(3\sqrt{5-5}\right)^{2}}\left(a_{1}\right)^{3}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}\left(3\sqrt{5-5}\right)^{2}}\left(a_{1}\right)^{3}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}\left(3\sqrt{5-5}\right)^{2}}\left(a_{1}\right)^{3}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}\left(3\sqrt{5-5}\right)^{2}}\left(a_{1}\right)^{3}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}\left(3\sqrt{5-5}\right)^{2}}\left(a_{1}\right)^{3}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}\left(3\sqrt{5-5}\right)^{2}}\left(a_{1}\right)^{3}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}\left(3\sqrt{5-5}\right)^{2}}\left(a_{1}\right)^{3}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}\left(3\sqrt{5-5}\right)^{2}}\left(a_{1}\right)^{3}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}\left(3\sqrt{5-5}\right)^{2}}\left(a_{1}\right)^{3}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}\left(3\sqrt{5-5}\right)^{2}}\left(a_{1}\right)^{3}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}\left(3\sqrt{5-5}\right)^{2}}\left(a_{1}\right)^{3}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}\left(3\sqrt{5-5}\right)^{2}}\left(a_{1}\right)^{3}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}\left(3\sqrt{5-5}\right)^{2}}\left(a_{1}\right)^{3}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}\left(3\sqrt{5-5}\right)^{2}}\left(a_{1}\right)^{3}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}\left(3\sqrt{5-5}\right)^{2}}\left(a_{1}\right)^{3}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}\left(3\sqrt{5-5}\right)^{2}}\left(a_{1}\right)^{3}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}\left(3\sqrt{5-5}\right)^{2}}\left(a_{1}\right)^{3}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}\left(3\sqrt{5-5}\right)^{2}}\left(a_{1}\right)^{3}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}\left(3\sqrt{5-5}\right)^{2}}\left(a_{1}\right)^{3}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}\left(3\sqrt{5-5}\right)^{2}}\left(a_{1}\right)^{3}}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}\left(3\sqrt{5-5}\right)^{2}}\left(a_{1}\right)^{3}}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}\left(3\sqrt{5-5}\right)^{2}}\left(a_{1}\right)^{3}}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}\left(3\sqrt{5-5}\right)^{2}}\left(a_{1}\right)^{3}}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}\left(3\sqrt{5-5}\right)^{2}}\left(a_{1}\right)^{3}}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}\left(3\sqrt{5-5}\right)^{2}}\left(a_{1}\right)^{3}}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}}\left(a_{1}\right)^{3}}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}}\left(a_{1}\right)^{3}}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}}\left(a_{1}\right)^{3}}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}}\left(a_{1}\right)^{3}}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}}\left(a_{1}\right)^{3}}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}}\left(a_{1}\right)^{3}}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}}\left(a_{1}\right)^{3}}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}}\left(a_{1}\right)^{3}}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+\sqrt$$

$$= \frac{1}{15} \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(45+25-30\sqrt{5})}{10}} (a_1)^3 = \frac{1}{15} \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(70-30\sqrt{5})}{10}} (a_1)^3 =$$

$$= \frac{1}{15} \sqrt{(5+\sqrt{5})(7-3\sqrt{5})} (a_1)^3 - \frac{1}{15} \sqrt{35+7\sqrt{5}-15\sqrt{5}-15} (a_1)^3 =$$

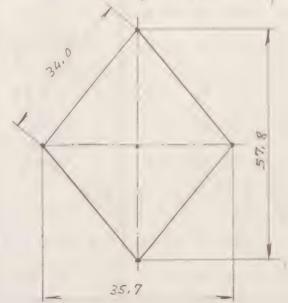


$$= \frac{1}{15} \sqrt{20-2\sqrt{5}} \left(a_1\right)^3 = \frac{2}{15} \sqrt{5-2\sqrt{5}} \left(a_1\right)^3$$

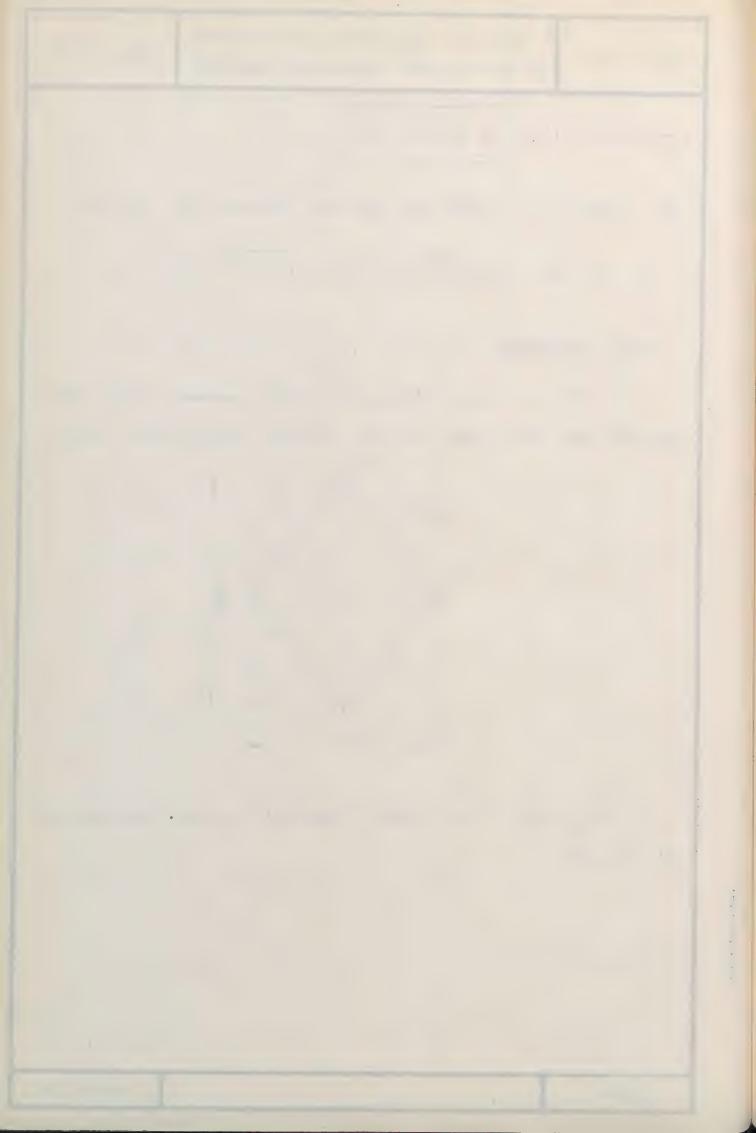
 $V=30 \times \frac{2}{15} \sqrt{5-2\sqrt{5}} \left(a_1\right)^2 = 4 \sqrt{5-2\sqrt{5}} \left(a_1\right)^3$

FIGURA CORPÓREA

Le oblique por acoplamients de 30 secubos, cuya diciquiair con los lados de los poliedos compagadis dada.



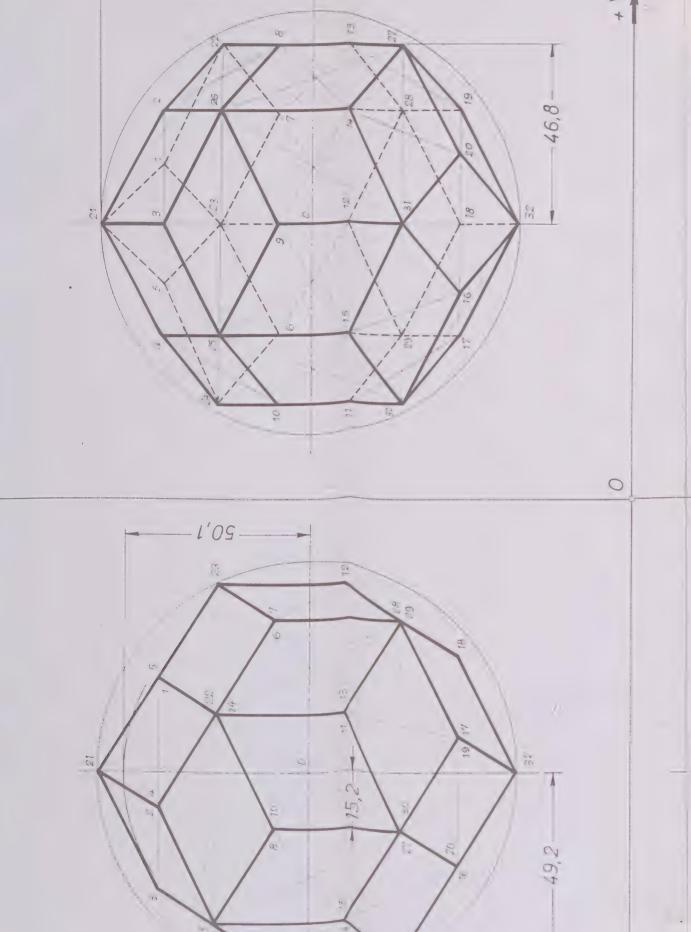
La longitud de la arista (34,0 mm) sirve de comprobación al trasado.



1, 14	1/ 1 +	V L desired war wimed
Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
Ł	$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$ α_1	0,61 80 34 d1
d ₂	V3 (5-V5)	0.91 05 93 a1
Ь	2 V5 a1	0.89 44 27 01
C	V 5+15 91	0,85 06 51 a,
120	$\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}} a_{1}$	1. 05 14 62 a ₁
1,2	$2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}a_{1}$	0, 64 98 39 a,
LIV	V 5- V5	0. 52 57 31 0,
P	V= 10 a1	0. 27 63 93 d1
24	$sen \ \Upsilon = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$	log. sen Ψ = 1, 978 20 63 Ψ = 72° 2 Ψ = 144°
5	6 (3 V5-5) (a,)2	10. 24 92 24 (a,)2
V	4 V5-2 V5 (a, 3	2, 90 61 70. (a.)3



Z+



0'99

ENUNCIADO

por sus aristas cuando se unen con-Representar por el método gráficoregular y de su icosaedro conjugado secutivamente los extremos de dos analítico en los planos I, II y III, el poliedro derivado de un dodecaedro aristas correspondientes en ambos.

8,72

El radio de la esfera circunscrita al icosaedro es de 55 mm, y las 0 (72, 72, 85) mm.

es- \Box A3v y Dibujar en formato

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

20 32 32 21 al 101 $\overline{\sigma}$ Dodecaedro conjugado (rojo)____ Poliedro derivado (negro) cosaedro dado (azul)___

1+

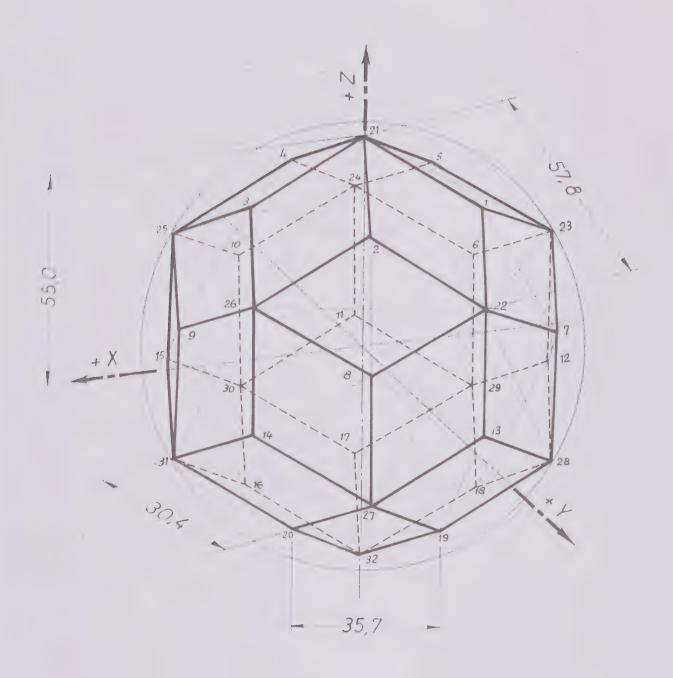
	Propuesta	Propuesta De entrega Entregada	Entregada	Califi-	
Fecha:				cación	(firma
Alumno:					
Escala		Deri	Derivado de los co	de lo)) S
1:1			dodecaedro-ico	redro	0-100

Escuela

onjugados saedro

Lámina 32





Derivado de los conjugados dodecaedro-icosaedro



ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los plamos I, II q III, el Arquimediano I, en el que en cada vértice concurren cuatro trianquelos equilateros q un cuadrado.

La longitud de en lado es de 40,9 mm, y las coordenadas de su centro O son: O (72, 72, 85) mm. Dibujar en formato A3V y a escala 1:1.

DATOS

0 (72, 72, 85) mm $l_1 = 40.7$ mm.



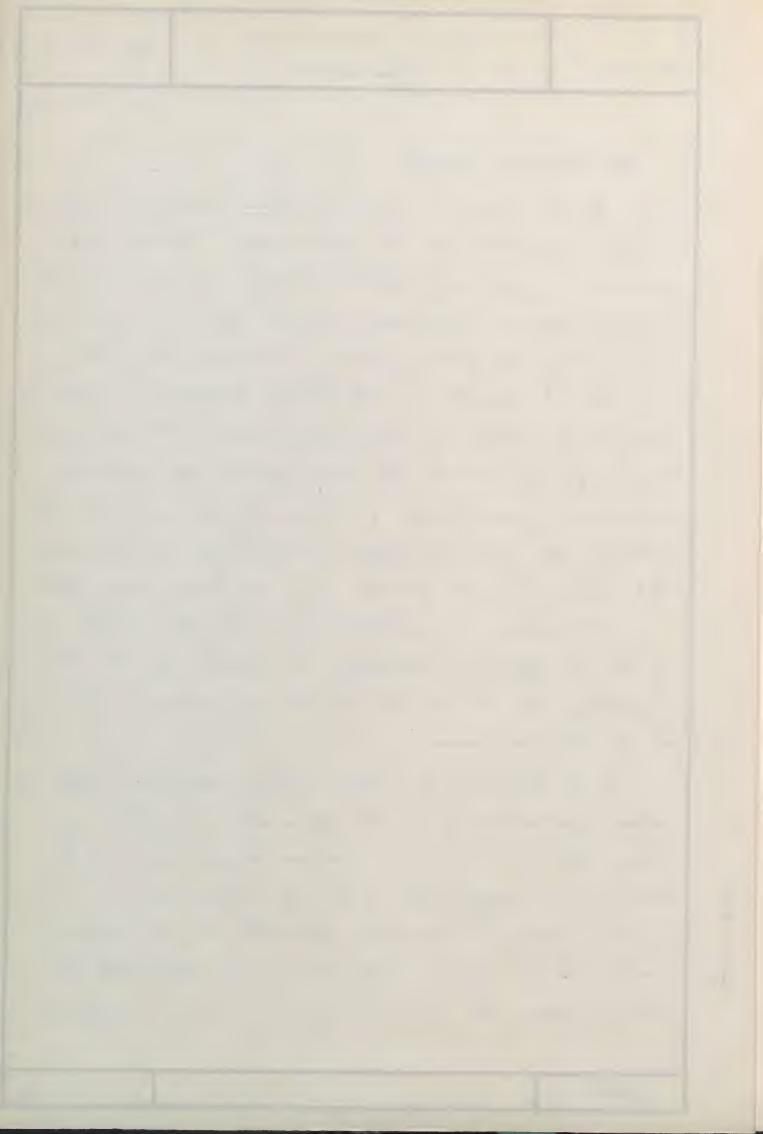
ten esta lamina que las catorce signientes vamos a cealizar el estudio de la demonnimados "Poliedros arquimedianos" que son aquellos poliedros conveccos cuyas camas son poligonos regulares no todos ignales y sus anquelos solidos son todos ignales o simetricos dos a dos.

En el desarrollo de este trabajo tendremos siempre en cuenta el estudio general realizado para esto principales, en el que se detalla los casos posibles de escistancia, propiedades generalizas y foramulas que sales para la obtención de sus principales magnitudes, en función del lado "l" del poliedro que se tema como dato.

El mimero de poliedes arquimedianos poribles es el de 13 tipos individuales, a mas de dos reries infinitas en el que es variable el mienero "n" de la de de de des de reus caras.

A los primeros los hemos designados con cifras romanas succesivas qua los requindos. "Torie An" qua "ferie "Bn" siendo "n" um entero mayor de 3 en la primera y mayor de 2 en la segunda.

Los fóranceles generales deducidas en el menciomado estudio y que africa: encio a cada caso particular, son las signientes:



[1]

$$a = \frac{e^2}{2\sqrt{e^2 - m^2}}$$

$$c = \sqrt{a^2 - a^2}$$
 [2]

$$b = \sqrt{a^2 - \frac{\ell^2}{4}}$$
 [3]

$$\varphi_{pq} = \alpha_p + \beta_q \qquad [4]$$

$$t_{3} \propto_{p} = \frac{2 c_{p}}{\sqrt{4 (d_{p})^{2} - J^{2}}}$$
 [5]

$$T_{q} \propto_{q} = \frac{2 c_{q}}{\sqrt{4 (d_{q})^{2} - 4^{2}}}$$
 [6]

en las que:

Drieta del poliedro arquimediano (dato del problema)

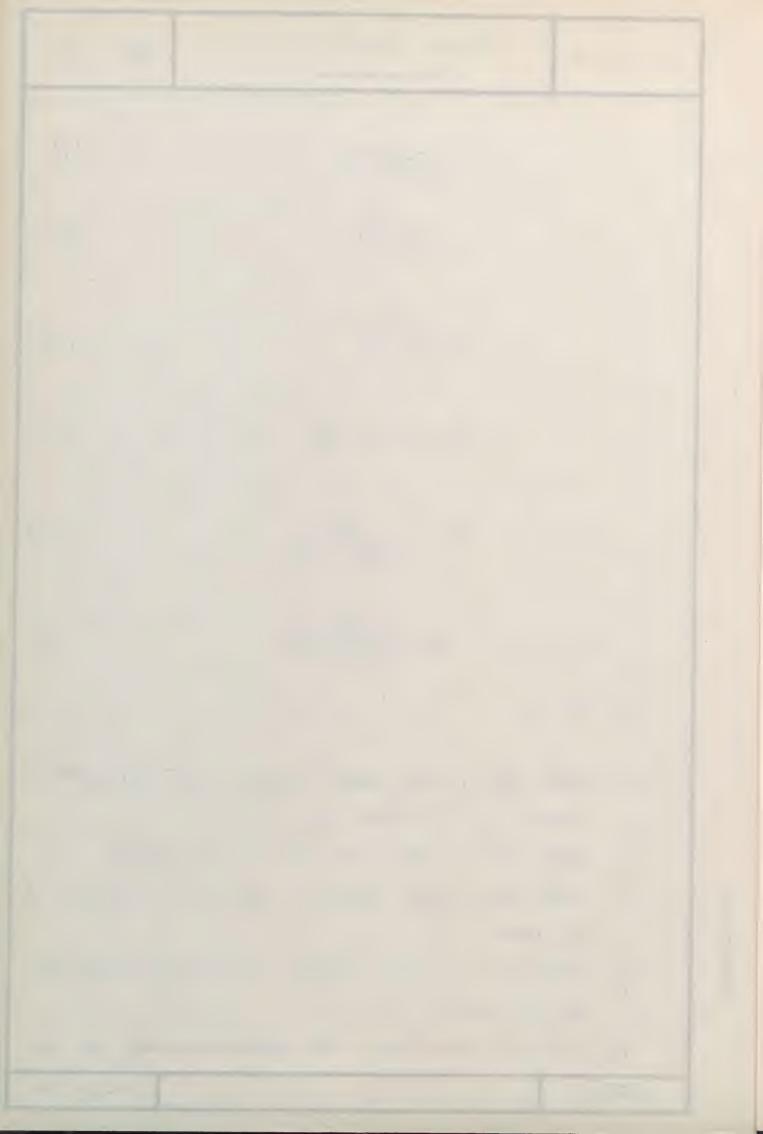
Radio de la esfera circumscrita

Radio de la esfera tangente a las aristas.

Radio de la esfera tangente a los caras regulares de "p" lados

Radio de la esfera tangente a les caras regulares de "g" la dos.

Ppg = Angulo rectilines del diedro formado por la



cara requiter de "p" lados seu la de q" latos.

de = Radio de la circumferencia circumferencia circumsorità a una cara de "p" lados.

dq = Id. id. a una cara de "q" lados.

m = Radio de la circumferencia circumscrita al poligono obtenido al unir los esctnemos de las aristas de un angulo sólido

Cambien obtendremos para coda caso particular

S: Luperficie

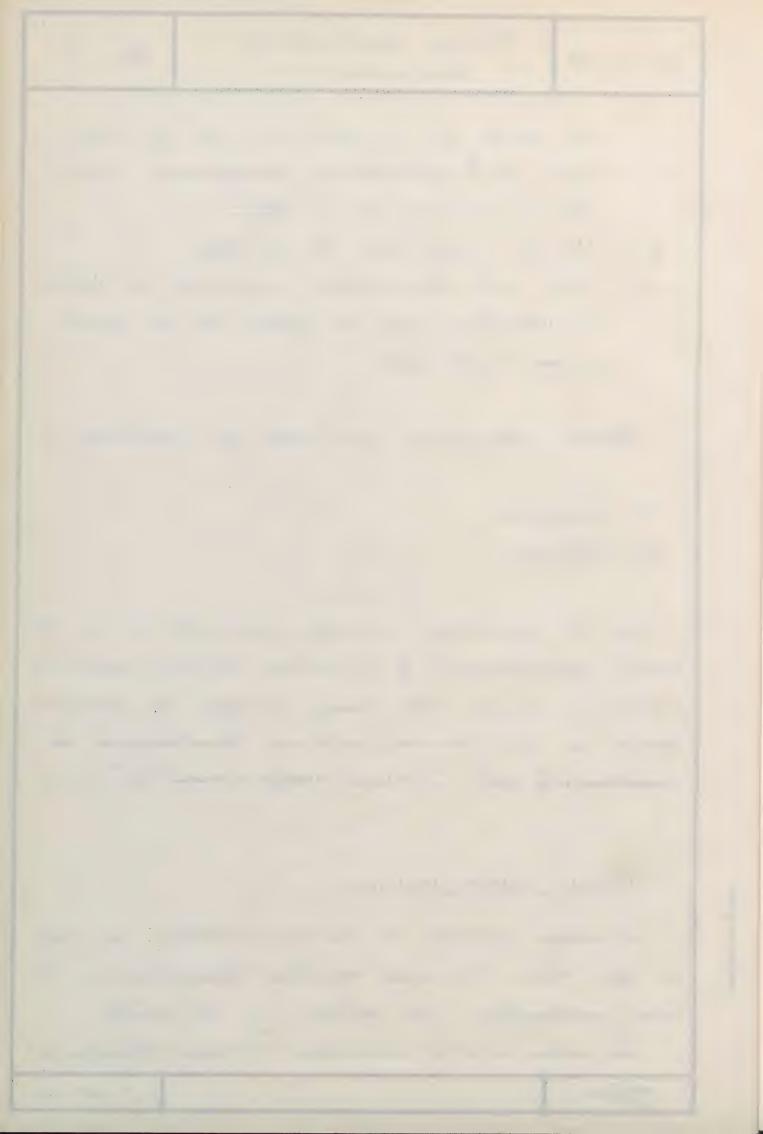
V : Volumen.

Para la representación de cada arquimediano, mos valdremos principalmente de los valores obteridos analíticamente vor la cura reduciones el orden de exposición
seguido en las láminas anteriores, limitandonos sochesivamente al "Proceso gráfico-analítico"

PROCESO GRAFICO- ANALÍTICO

El estudio realizado às este arquimediano, mos indica que tiene 32 caras requiares trianquelares y 6 caras cuadradas; 24 vértices y 60 aristas. En cada vértice concurren 4 caras Trianquela-





Asi pues, tendreuros que

Arquimediano I (4 P3 + 1 P4); G = 32; C = 6: V=24; A = 60

Calculo de sus magnitudes

Srista "l" del arquimediano

Late del ejercicio

Radio "m" de la circumferencia circumscrita al policiesono obternido al unir los excluenos de las cinco aristas de un ángulo poliedro.

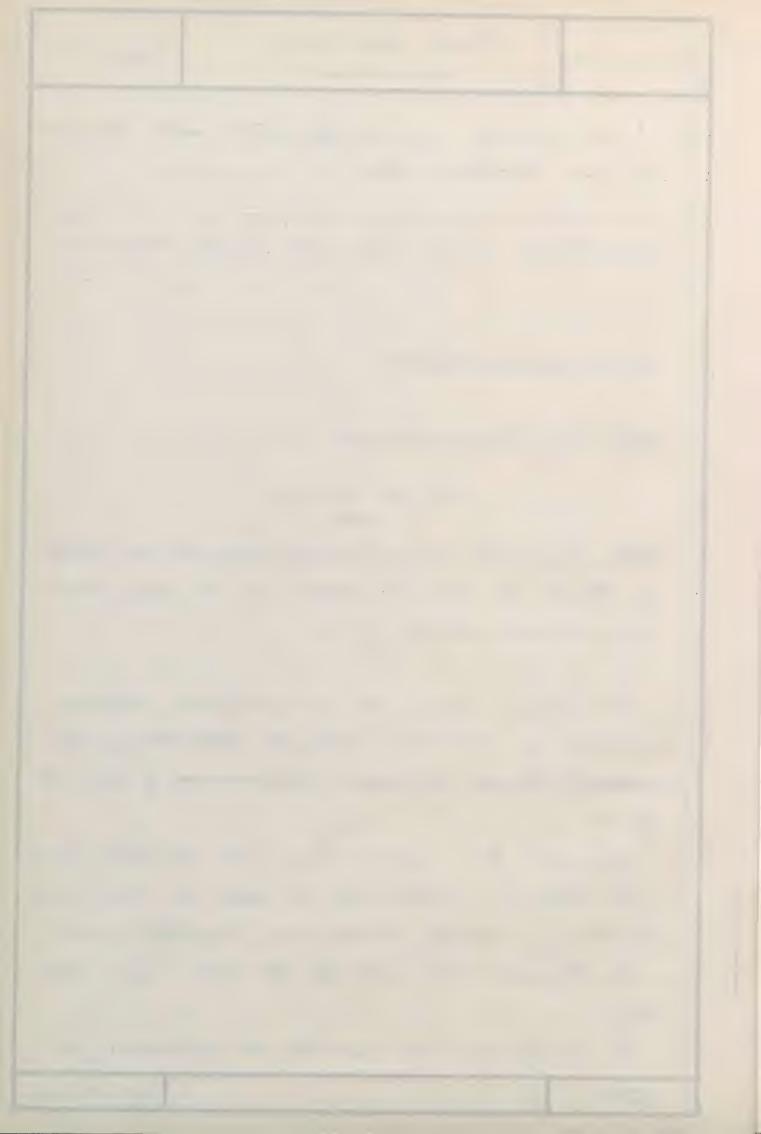
Este poligono plano será un pentágono irregular (concurren en el virtice 4 triangulos equilateros y un madrado) formado por cuatro lados iquales y une designal.

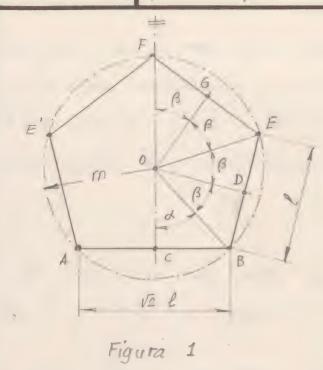
bos enatro lados ignales tienen una longitud ignal a la arista "l" (tencer lado de cada casa toiamentas acquelas) y el quinto tendrá una longitud ignal a la diagonal del cuadrado de lado "l", o sea "\var2".

En la figura 1 re representa este poligano, que

ES

5-11-73





ha de estar inscrito en una circumferencia, cuyo radio "m" quereomos determinas.

No existe solucion gráfica exacta para este problema.

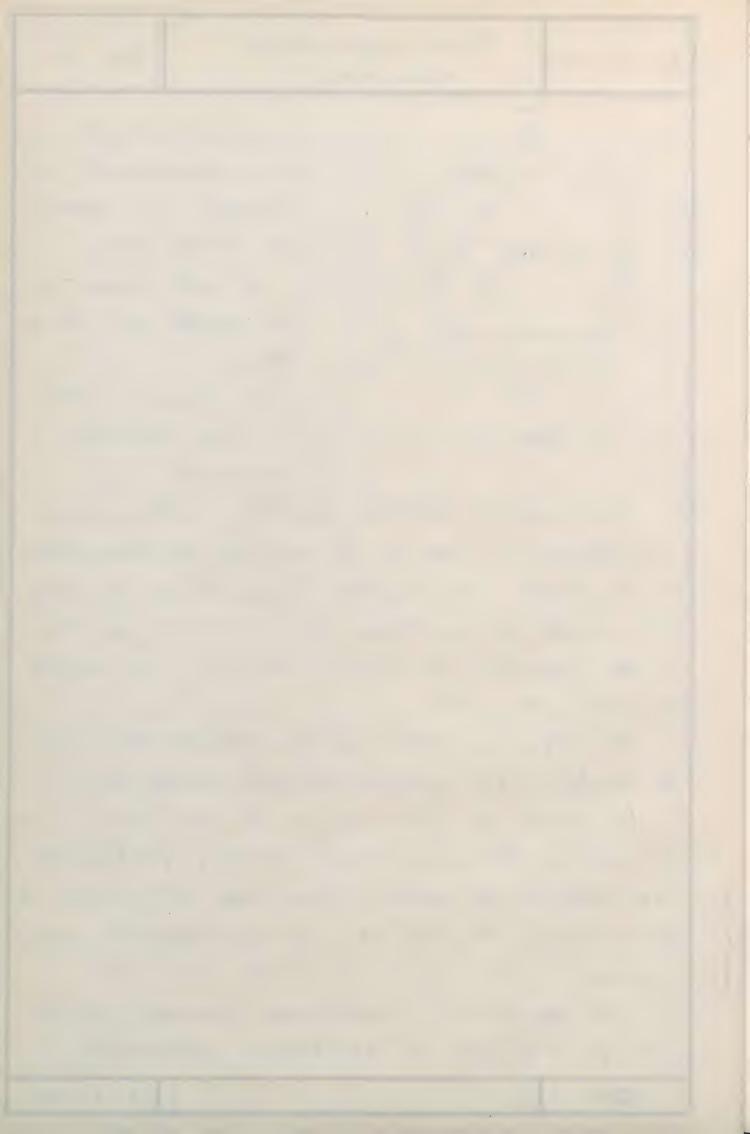
es la que estudiamos a continuación.

Suponiendo el problema cresuelto ga efiniendonos a la figura 1, rea Q el centro de la circumferencia de aadio "m" bencado (incógnita), en la cual esta inscrito el pentagono A-B-E-F-E' que tiene A=1 lados iguales A=1 A=

De la figura se deduce que el pentagono tiene un eje de sometria F.O.C, mediatrir del lado mayor AB.

Li minimos los vertices B q E con el centro O, se mos formaran los trianquelos isosceles B.O.E q E.O.F ignales, enyas alturas con respecto a sus bases B.E q E.F, mos determinaran los puntos D q G respectivamente, que

^{*} La excistencia de la circumferencia circumscrita al polégono, que se presupone, la domostraremos posterios mente.



seriescues a su ves em el centro D.

Lu pues structures el anquilo C.O.B = & g 15. E.O.D., D-O-E, E.O-G g G-O-F todo agrades, que demominariones B, overificandese que

$$\times + 4\beta = 2\pi \tag{1}$$

il andio "m" buscado se susia situres en funciosi
de "B"; "l", ya que

$$OB = \frac{BD}{\text{sen }\beta}$$
 o sea: $m = \frac{\ell : 2}{\text{sen }\beta} = \frac{\ell}{2 \text{ sen }\beta}$ (2)

Priceso de acuerdo con la fig. 2:

$$nu \quad \alpha = \frac{cB}{oB} = \frac{\sqrt{2} \ell}{m} = \frac{\sqrt{2} \ell}{2m}$$
 (3)

por otra parte

seu
$$\beta = \frac{\dot{\epsilon}D}{0B} = \frac{\dot{\ell}}{m} = \frac{\ell}{2m}$$
 (4)

7 dividiendo (3) por (4)

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{cen } \beta} = \frac{\sqrt{2} l}{2m} \cdot \frac{l}{2m} = \sqrt{2}$$
(5)

Pero siendo el angrelo "" " su plementario del "48" se verificara que



Du a = 02 - 4 B

101

Emicado en eccento 15) y (61, exocibicamo

$$\boxed{V2} = \frac{2eu \times}{neu \beta} = \frac{neu \beta}{neu \beta} = \boxed{8 \text{ cm}^{3} \beta - 4 \text{ cm} \beta} \tag{7}$$

ecuación cubica en "cos \beta" cuya solución mos de termimora el valor de cos \beta", con el cual obtendremos "sen 3", finalmente m" por la ecuación (2)

Desarrollo del calculo auterior:

$$\boxed{\overline{V2}} = \frac{\text{ren 4B}}{\text{ren B}} = \frac{\text{ren 2B con 2B}}{\text{ren B}} = \frac{2 \text{ ren 2B con 2B}}{\text{ren B}} = \frac{2 \text{ ren B}}{\text{ren B}}$$

$$= \frac{2 \times 2 \text{ sen } \beta \text{ cos } \beta \times \left(2 \cos^2 \beta - 1\right)}{\text{sen } \beta} = \frac{8 \times 2 \times 3 + 3 \times 3}{\text{cen } \beta} = \frac{4 \times 2 \times 3}{\text{cen } \beta}$$

Para resolver la ecuación cúbica (4), haçani premamente cos β = x, y escribiremos:

8 x3 - 4 x = 12, de doude 8 x3 - 1 x - 12 = 0

7 dividiendo por 8, tendremos

$$\approx^3 - \frac{1}{2} \approx - \frac{\sqrt{2}}{8} = 0 \tag{8}$$

que ne reside transformar en la general

ES

5-11-72



(51

Tourends in countre (5) g (6), excelience

$$\boxed{V_2} = \frac{\text{sen } \beta}{\text{nen } \beta} = \frac{\text{sen } \beta \beta}{\text{nen } \beta} = \left[8 \cos^3 \beta - 4 \cos \beta \right] \quad (7)$$

ecuación dibica en "cos B" enya volución por determimara el valor de cos B", con si ense obtendre-2 finalmente m por la ecuación (3) mis shee B"

Desarrollo del calculo auteria:

$$|V_2| = \frac{\text{neu } 4\beta}{\text{neu } \beta}$$
 seu $[2 \times (2\beta)]$ = $\frac{2 \text{ neu } 2\beta \text{ cos } 2\beta}{\text{neu } \beta}$ =

2 x 2 seu B cos B x (2 cos 2 B - 1) 8 seu B cos B - 4 seu B cos B sec. B

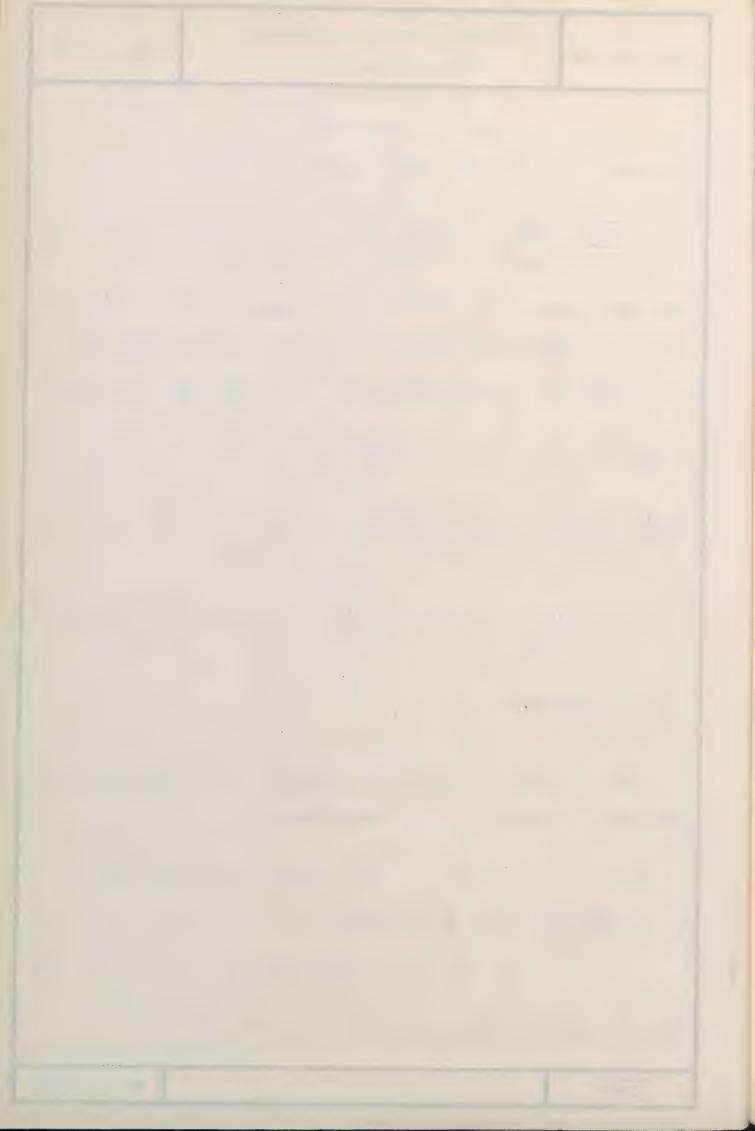
Para resolver la ecuación cúbica (3), haganes pucos β = x, q escribiremos:

8 x3 - 4 x = \(\frac{72}{2}\), de doude 8 x3 - 4 x - \(\frac{72}{2}\) = 0

of dividiends por 8, tendremos

$$x^{3} - \frac{1}{2} > c - \frac{\sqrt{2}}{8} = 0 \tag{8}$$

que se puede transformar en la general



z3 + pz + 9 = 0

haciento $z = \infty$, $p = -\frac{1}{2}$, $q = -\frac{\sqrt{z}}{q}$

La formula de Cardans " nos permite obtener "z" real ciempre que se verifique que

$$R = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$$

lo cual sucede en este caso, ya que

$$R = \left(\frac{-\frac{\sqrt{2}}{8}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\frac{1}{2}}{3}\right)^3 = \frac{1}{128} - \frac{1}{216} = \frac{11}{3456} > 0$$

Desarrollo del calculo auterior:

$$\boxed{R} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{16}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{2}{16^2} - \frac{1}{2^3 \times 3^3} = \frac{1}{128} - \frac{1}{216} = \frac{1}{216}$$

$$= \frac{2^3 \times 3^3 - 2^7}{2^{10} \times 3^3} = \frac{3^3 - 2^4}{2^7 \times 3^3} = \frac{11}{3456} > 0$$

of por consigniente:

$$=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{16}} + \sqrt[3]{\frac{11}{3456}} + \sqrt[3]{\frac{12}{16}} - \sqrt[3]{\frac{11}{3456}} = [0, 84\ 25\ 09\ 20\ ---] = 65; (3)$$

Desavrolle del calculo auterior:

* Ver "Matemàticas para Ingenieros o Eécnicos", de R. Doerfling, pag. 58. Editorial (1.16)

GE 2



$$2 = \sqrt{-\left(-\frac{\sqrt{2}}{8}\right)} : 2 + \sqrt{\frac{11}{3456}} + \sqrt{\frac{3}{-\left(-\frac{\sqrt{2}}{8}\right)}} : 2 - \sqrt{\frac{11}{3456}} = \frac{3}{\sqrt{-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{16}} + \sqrt{\frac{11}{3456}} + \sqrt{\frac{3}{16}} - \sqrt{\frac{11}{3456}}$$

$$\frac{2}{3}$$
 = 0.150 5150

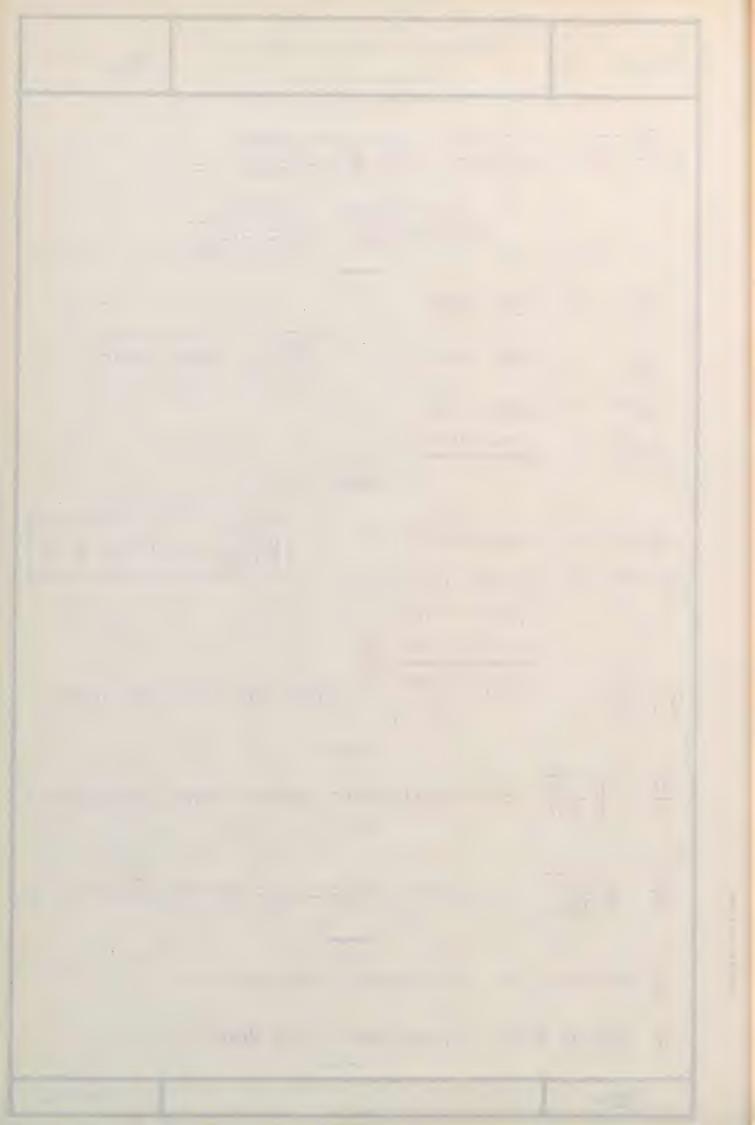
$$\frac{\sqrt{2}}{16} = 0, \ 08 \ 83 \ 88 \ 35$$

 $\sqrt{\frac{11}{3456}} = 0.05 64 16 94$

$$\sqrt{\frac{11}{3456}} = \frac{1,5028190-4}{2} = 0.7514095-2 = 2,7514095$$

$$\frac{\sqrt{2}}{16} + \sqrt{\frac{11}{3456}} = 0.08838835 + 0.05641694 = 0.14480529$$

$$\frac{\sqrt{2}}{16} - \sqrt{\frac{11}{3456}} = 0.08838835 - 0.05641694 = 0.03197141$$



 $k_{f} \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{16} + \sqrt{\frac{11}{3456}}} = \frac{k_{f}}{3} 0.14 48 05 29 = 2.160 7845 - 3$

= 0,720 26 15 -1 = 7,720 26 15

 $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{16}} + \sqrt{\frac{11}{3456}} = 0,52512354$

 $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{12}{16}-\sqrt{\frac{11}{3456}}} = \frac{490.03197141}{3} = \frac{1.5047618-3}{3} = \frac{1.5047618-3}{3}$

= 0,501 5873 - 1 = 1,501 5873

 $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{16}} - \sqrt{\frac{11}{3456}} = 0.31 73 85 66$

0,84 25 09 20

Los des valores aestantes de la ecuación cubica (8), son ima-

Del valor cos 3 = 0,84 25 09 20 --- re deduce

sen B = V1 - cas B = V1 - 0.84 25 09 20° = 0.53 86 81 90 ... (10)

7 de cité

-50

B = 32° 35' 38,2"



Comprébacion numérica de la rais real

Vanos a comprobar numéricamente si la rais ceal obternida para la ecuación (8), la verifica, Dicha vais es

DC = CF3 B = 0,84 25 09 20 ...

siendo la ecuación: $x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{8} = 0$

o rea

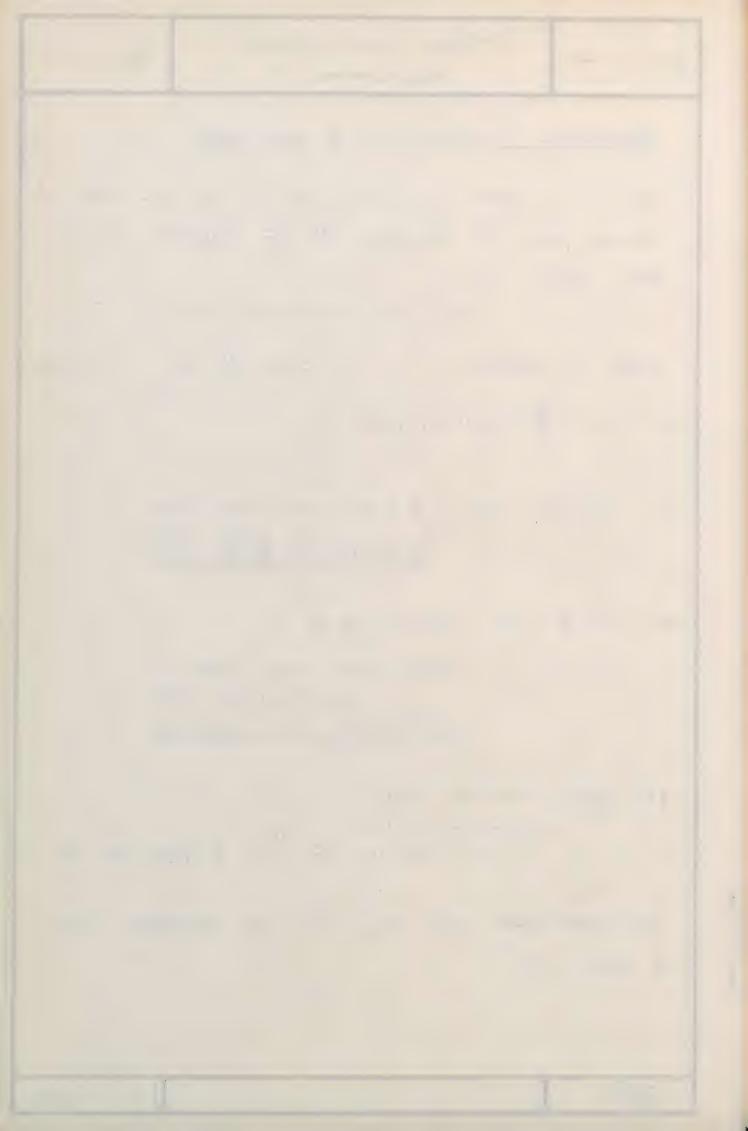
 $x^3 - \frac{1}{2} x = \frac{\sqrt{2}}{9} = 0.17 67 76 70 ---$

x3 = 0,70 98 21 75 x 0,84 25 09 20 =

= 0,59 80 24 82 43 75 00 00 + 6 53 03 60 10 00 . 0,59 80 31 35 47 35 10 00

 $x^{3} - \frac{1}{2} > c = 0.59 \ 80 \ 31 \ 35$ $- 0.42 \ 12 \ 54 \ 60$ $0.17 \ 67 \ 76 \ 75 - . = \frac{\sqrt{2}}{8} = 0.17 \ 67 \ 76 \ 70$

la cipa 10-7.



que llegar

Comprobado el resultado numérico de cos \beta = 0.84 25 07 20...
que nos confirma el de la foranula (10)

sen B = 0,53 86 81 90

llegaremos al resultado final del valor "m", reguine la foranula (2)

m = \frac{l}{2 \text{ alu \beta}} = \frac{1}{2 \times 0,53 86 81.90} \left\{ = 0.92 81 91 57... \left\}

Radio "a" de la esfera circumscrita

Aplicando la foranula general [1]. tendremos:

 $\boxed{q} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - m^2}} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - (0.92819157...\ell)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1 - 0.92819157^2}} \ell = \frac{1}{2\sqrt{1 - 0.92819157^2}}$

 $=\frac{1}{2\sqrt{0.1384604093809351}}\ell=\frac{1}{2\times0.37210268}\ell=$

= 1, 34 37 15 13 ---- &

Radio "b" de la esfera tangente a las aritas

Aplicando la formula general [3], tendremes:

 $b = \sqrt{a^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{(1.34 \ 37 \ 15 \ 13 \dots \ell)^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{1.34 \ 37 \ 15 \ 13^2 - 0.25} \quad \ell =$

(Jee

5 - 11 - 72



V 1, 80 55 70 35 25 70 35 67 -0155 - 1 = V 1.55 65 70 35 05 90 71 65 21

= 1, 24 72 25 06 ... &

Fadio "dz" de la circumberoncia en cuentra a mua cara triangular cequelar de lado "l".

Le demuestra en Geometria es

$$d_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \ell$$

Radio "de la circumio sucia circumscrita a una ca

Le deamestra en geometria es

$$d_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \ell$$

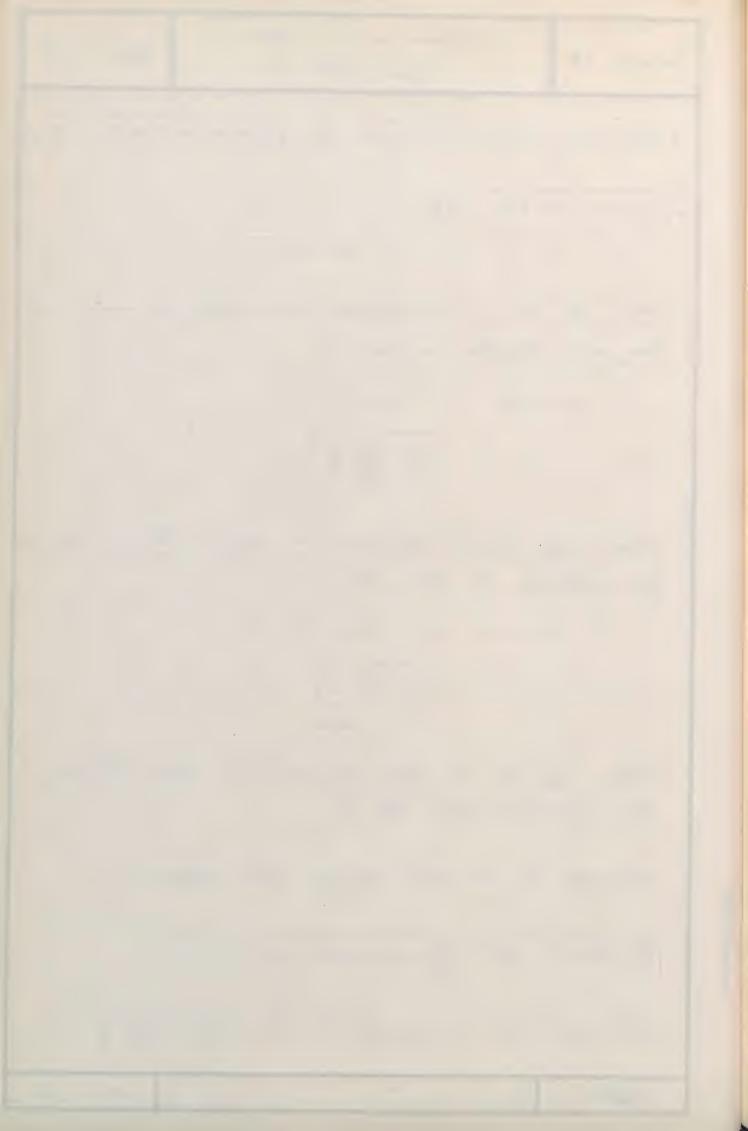
Radio "C3" de la esfera tangente a las caras trianque-

Aplicando la formula zeneral [2], tendremos:

$$C_3 = \sqrt{a^2 - (d_3)^2} = \sqrt{(1, 34 \ 37 \ 15 \ 13 \dots \ell)^2 - (\frac{\sqrt{3}}{3} \ell)^2} =$$

$$= \sqrt{1,34371513^2 - \frac{1}{3}} \times \ell = \sqrt{1,8055703505909169 - \frac{1}{3}} \times \ell =$$

C)



= \ 1. 47 22 37 01 72 57 58 36.6 1, 21 33 57 74.... 27

Partie "c," de la exfera tangente a las caras madrades

Aplicando la formula general [2], tendremos:

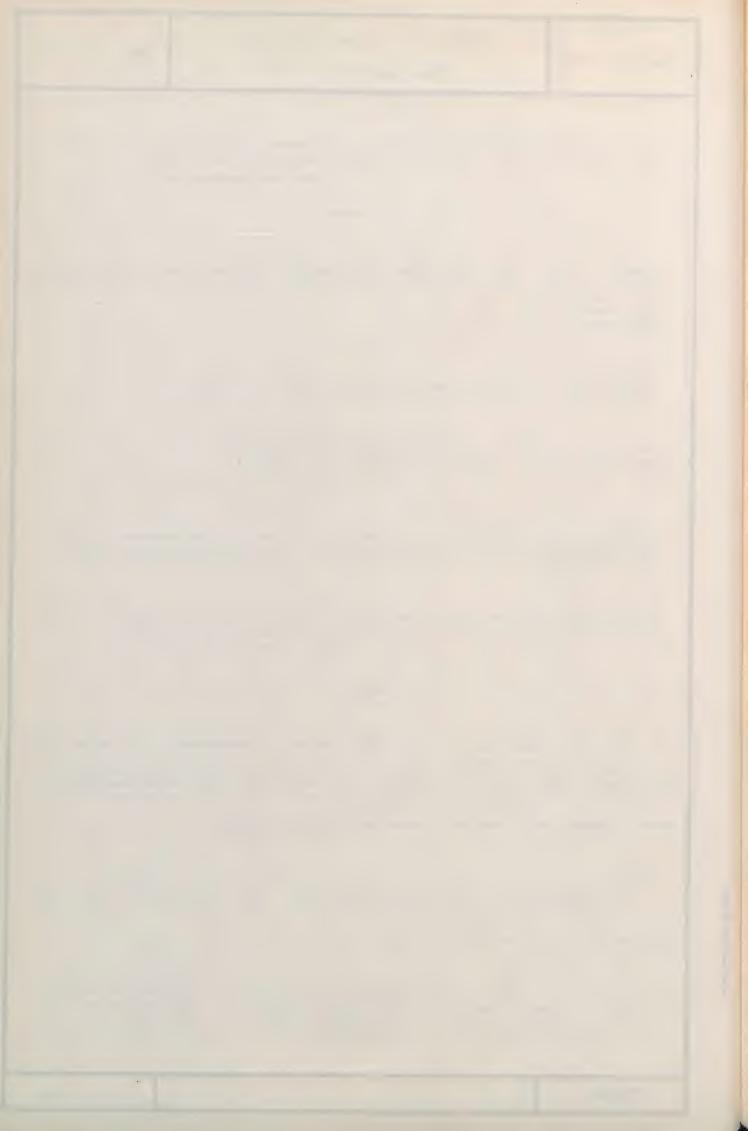
 $C_4 = \sqrt{a^2 - (d_4)^2} = \sqrt{(1.34 \ 37 \ 15 \ 13... \ell)^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2} \ell)^2} =$

= V 1. 30 55 70 35 05 90 91 69 & = 1, 14 26 15 57 l

aa triangular, con el plano diametral del arquimediano, que pasa por una arista de aquella.

le determina en función de su tangente, por la fórmula general [5]:

 $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2c_3}{\sqrt{4(d_3)^2 - \ell^2}} = \frac{2 \times 1.21335774. \ell}{\sqrt{4 \times (\frac{\sqrt{3}}{3} \ell)^2 - \ell^2}} = \frac{2 \times 1.21335774}{\sqrt{4 \times \frac{3}{9} - 1}}$



 $= \frac{2 \times 1.81 \cdot 33 \cdot 57 \cdot 74}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = 2.42 \cdot 67 \cdot 15 \cdot 13 \cdot \sqrt{3} = 4.30 \cdot 31 \cdot 94 \cdot 51 \dots$

4 to a = 0.603 57 95

×3 = 76° 37' 43"

Angulo rectilines "d" del diedro tormado pa una cava cuadrada, con el claso diaministral del arquirme diamo, que pasa por uma ariota de aquillo.

Le determina en funcion de su tançante, por la Jornala general [6]

$$\frac{1}{2} \propto_4 = \frac{2c_4}{\sqrt{4(d_4)^2 - \ell^2}} = \frac{2 \times 1, 14 \cdot 26 \cdot 15 \cdot 57...\ell}{\sqrt{4 \times (\frac{\sqrt{2}}{2} \ell)^2 - \ell^2}} =$$

$$= \frac{2 \times 1.14 \ 26 \ 15 \ 57.}{\sqrt{2-1}} = 2.28 \ 52 \ 31 \ 14...$$

ly to dh = 0, 358 9301

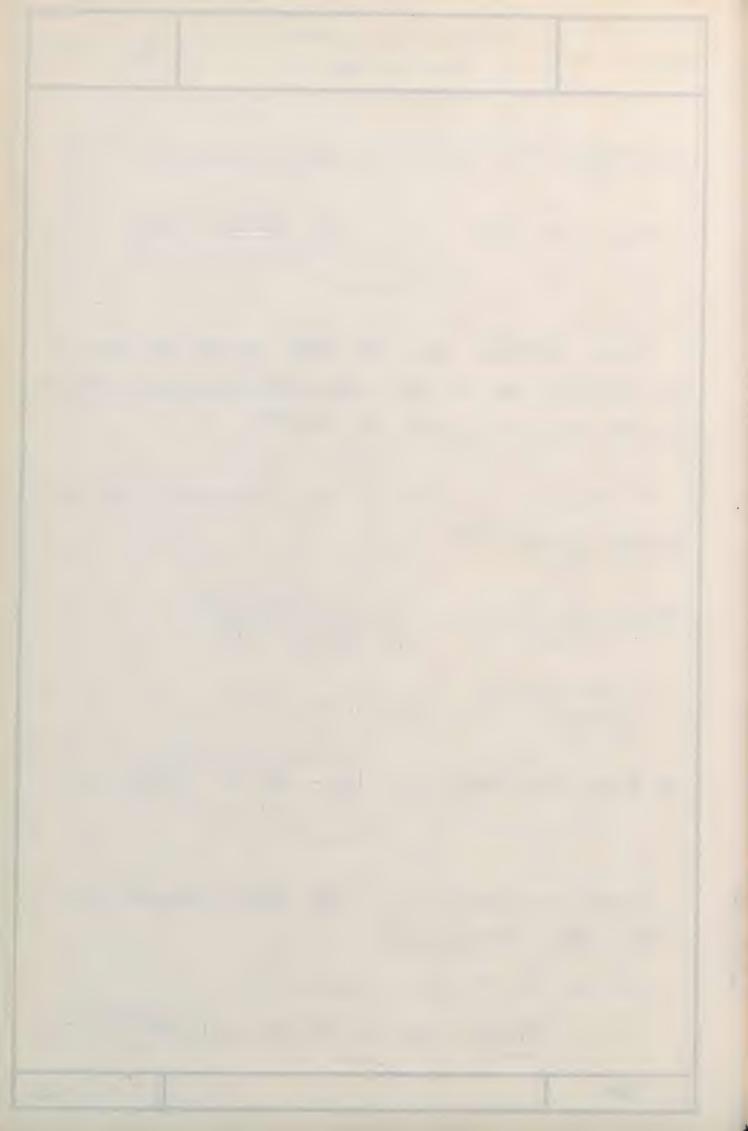
Angulo acclilines " 43-3" del didro formado por dos caras trianquelares

Aplicando la fórmula general [4]

$$|\psi_{3-3}| = 2 \propto_3 = 2 \times (76^\circ 37' 2.3'') = 153^\circ 14' 4.6''$$

52

8-11-72



Inquelo restellaco "You del diedro formado por una cara terangular o una madreda

Aprilando la tromala queral [h]

Area lateral "S" del arquimediano

Le compone de 32 caras triangulares y 6 madrada, ambas de lado "l"; la superficie total rerà:

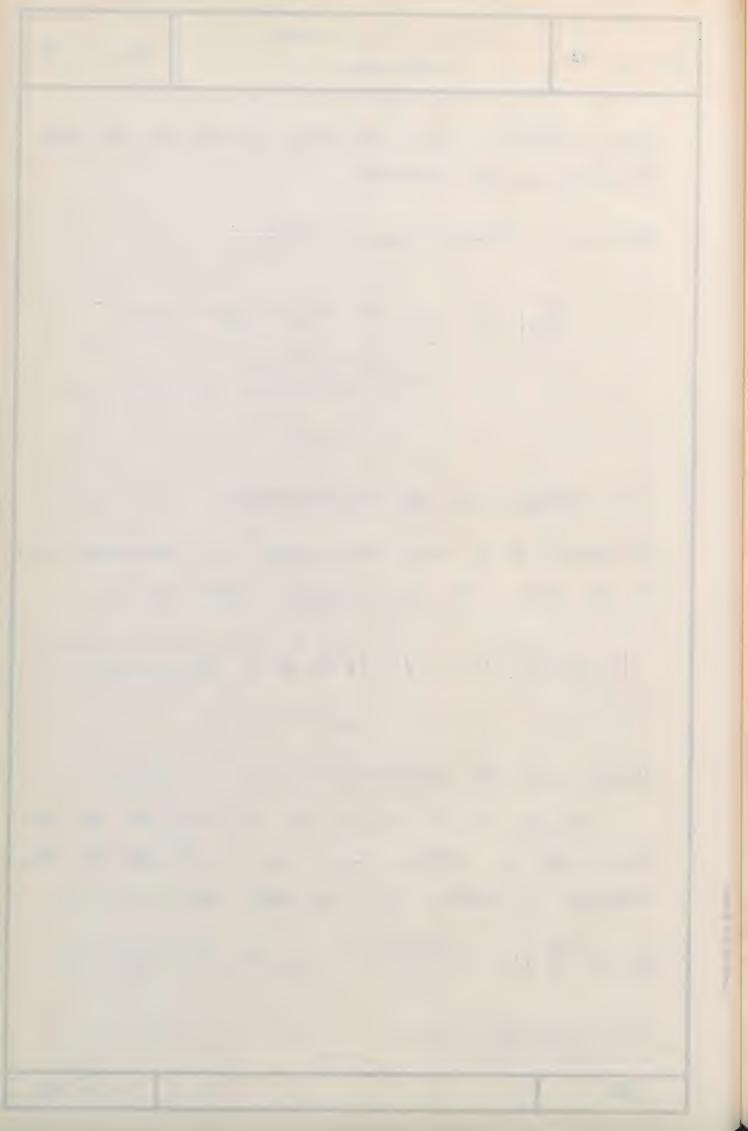
$$S = 32 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \ell^2 + 6 \ell^2 = (8 \sqrt{3} + 6) \ell^2 = [19, 25 64 66 46 - ... \ell^2]$$

Volumen "V" del arquimediano

Le compone de la suma di 32 piramides de base trianquelas q altera C3, q de 6 personales de base cuadrada q altera C4; su valor sera

$$V = 32 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \ell^2 \times \frac{1,21 \ 33 \ 57 \ 74 \dots \ell}{3} + 6 \times \ell^2 \times \frac{1,14 \ 26 \ 15 \ 57 \dots \ell}{3} =$$

TER



Desarrollo del execulo auterior:

$$V = \frac{32\sqrt{3}}{4} \times \frac{1,21}{3} \times \frac{35774}{3} + \frac{6}{3} \times 1,14261557$$

$$\frac{8\sqrt{3}}{3} = 4.61 88 02 15;$$

130



en el modes municipales que presentames a materiores.

CUADRO SINOPTICO

Magnitud	Valor exacto	V 1 day of about made
Magnitud		Valor decimal aproximado
a	$\frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2-m^2}}$	1.34 37 15 L
Ь	$\sqrt{a^2-\frac{\ell^2}{4}}$	1. 24 72 25 1
C ₃	$\sqrt{\alpha^2 - (d_3)^2}$	1, 21 33 58 l
C4	$\sqrt{a^2-(du)^2}$	1, 14 26 16 £
d3	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ ℓ	0, 57 73 50 l
d ₄	V2 2	0.70 71 07 l
m	1 2 ren B	0. 92 81 92 l
\prec_3	$T_3 \propto_3 = \frac{2C_3}{V4(d_3)^2 - \ell^2}$	tg 43 = 2,42 67 15 x3 = 76° 37' 2,3"
4	tg. of 4 = \frac{2C4}{\lambda 4 (d4)^2 - 1^2}	5 ×4, = 2, 28 52 31 ×4 = 66° 21' 58,2"
Ψ3-3		Ψ ₃₋₃ = 153° 14' 4.6"
¥3-4	03 + B4	9 ₃₋₄ = 142° 59′ 0,5 "
5	(8 V3 + 6) l ²	19, 85 64 06 l²
V	$(32 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{C_3}{3} + 6 \times \frac{C_4}{3}) \ell^2$	7, 88 94 90 {3
ß {	$\cos \beta = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{16} + \sqrt{\frac{11}{3456}}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{16} - \sqrt{\frac{11}{3456}}}$	ω β = 0, 84 25 09 β = 32° 35′ 38,2″
	sen $\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta}$	$sen \beta = 0.53 86 82$



a la representación qua fica del arquimediano I. de la-

Jara su transfer pres raldreurs, de colas calculados por las los munias entenimes, de processos qualicas y de colas complementarias curso carento perisperse como de seda - mente. Bosas las curso mentendes las selendamentes curso de seda - funcion del cado le del asquirmedamen, as successor del cado le del asquirmedamen, as

Catalonic personnente de segunsião acoquestados

6 = 46, 9 in sec

a = 1,34 37 15 x 40,9 = 55,0 n=

b = 1,24 72 25 - 41,9 = 51,0 mm

C3 = 1, 21 23 58 x 20, 3 = 49, 7 11 11.

Cy = 1. 14 25 16 . 16 5 = 46.7 mm

1/4 = 0,70 71 07 × 20,5 = 18.9 mm

il orden de operaciones del parado grafico (lam. ?!) .. el signification

1º Lituar el centro O. de coordenadas 72, 72, 85

2° Dibuja en I, II. j II la velera corcumsoreta de

Representar en I. II q II la cara cuadrada 1-2-3-4, surpuesto el polistro colocado con dicha cara paralela a II.

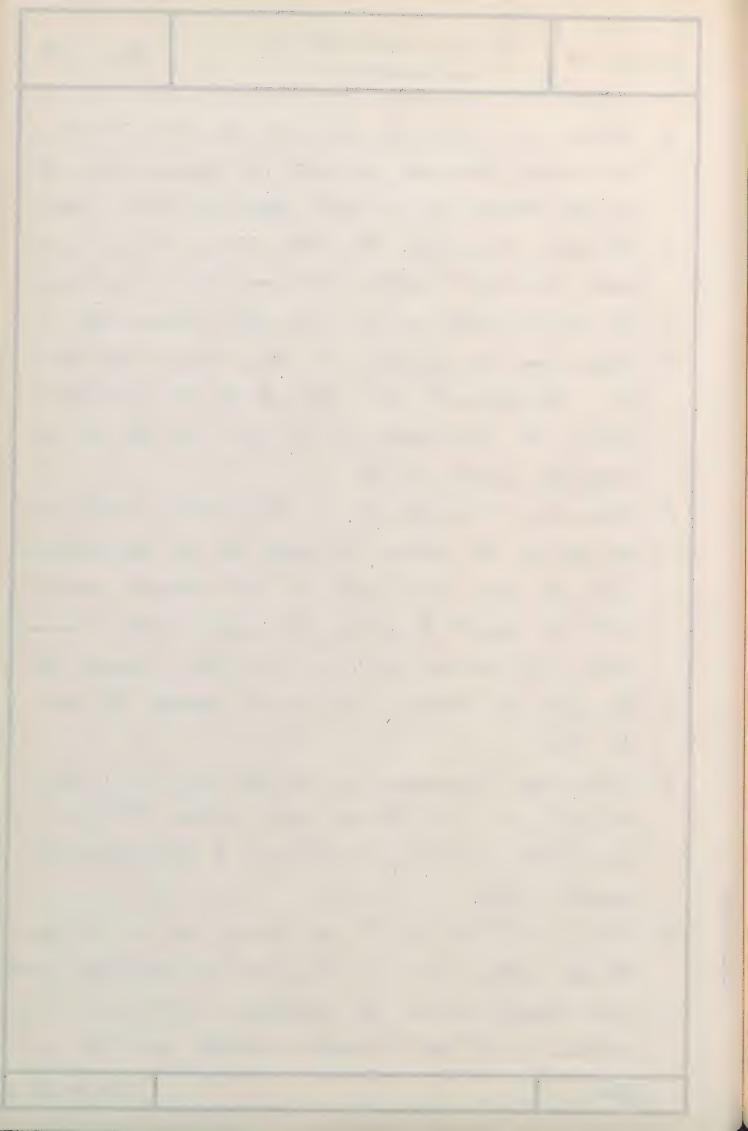
q des laste (1-4, 2-3) perpendiculares a I.

()-



- so continue to the telemental of acide the proportion of the service of acide the perpendicular of the service of acide the service to the service to the service to the service to the service of the se
- 50 beterminne las proyecces en II III de dicho vértices
 5. 1 squadamente en I. II III las de les mentices
 6. 7 g 8. (bos vértices 5. 6. 7. g 8 min les se une
 cuadrado paralelo al II).
- 6° Seterminar las proyecciones en I_{2} II de la arista 2.11, por giro de la misma al rededor del eje per pendicular a II que pase por el centro 0, hasta colocarla paralela a I, las puesto 2_{2} 1_{1} orden robre la esfera circumstria 1_{1} el ce aresta. Uservese tambien que la arista 1_{2} 1_{1} en la proyección II, para for 0_{2} .
- tamente en I, II q III las de les ventices 9, 10, 12.

 (bos vértices 1, 10, 11 q 12 en les de un cuadrado paralelo a II).
- 8° Torasan en II el eje "h" que forma con el 5-7 [paralelo este sillèmo al X) un anquelo E = 16° 28' 3,1" (5 E = 0,29 55 91) 9° bos restantes vertices del poliedro 13 al 24 son simétrices en II con ses pects a dielo eje "h", por



to que si situación en II es involute. Unicido della describe toda de minimo o estadiones la minimo de de las aristas concerpondientes potrones representes en II da proposición total est procedo.

liedro, Esta tener en enerta que la mérica 13 de 16 estan eliadro arone un planes paralelo al de la vistecer 9 al 12 y equadrilante del diametral paralelo a II.

Ignalmente occurre un la visteres 17 el 30 cm recpreto a la 5 al 8, ani como los el al 28 cm recto a la 1 al 11.

Como comparamental trasado que fico como anterior en esta comparamenta que daran mayor escactitud a dicho trasado.

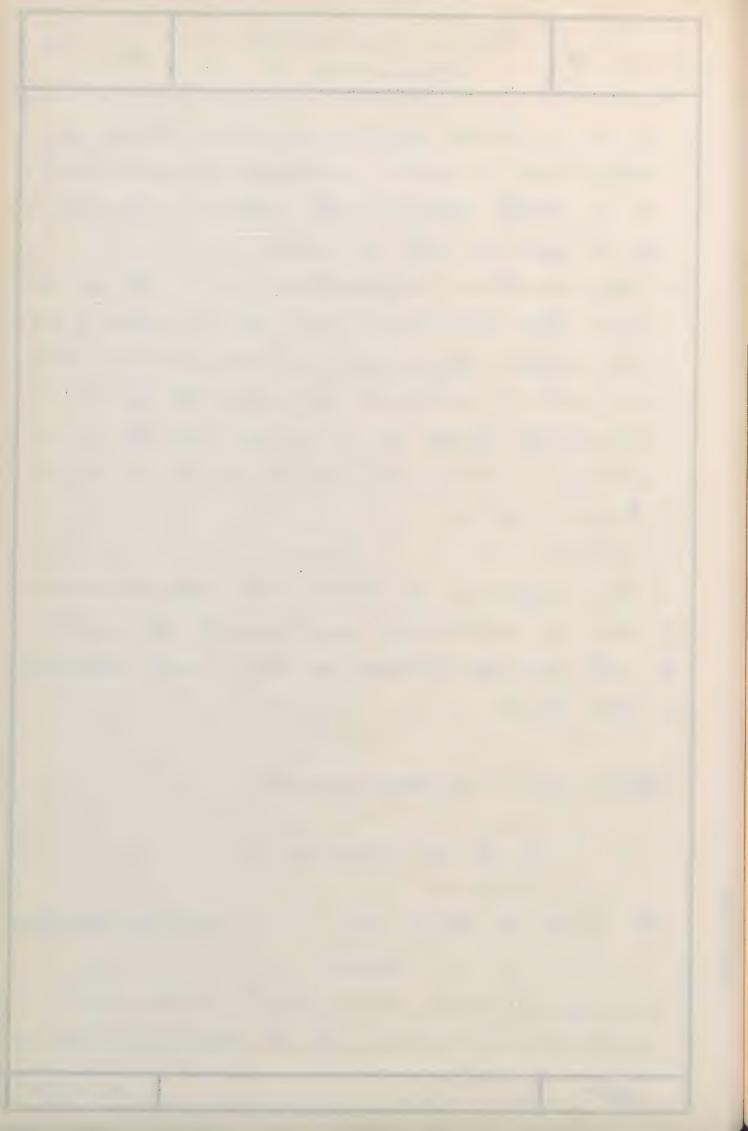
Altera " o de una cara triangular

$$n = \frac{\sqrt{3}}{2} \ell = 0.86 66 25... \ell$$

Para el caro del dibrepo aera n= 0.26 60 254x 40,9=35,4 mx

Distancia "gr" de la mestro. 5 al 8 al plane de la cara ma





drade operate is as 21 to votice myestudo ha altera "" with a law II; el angulo de processo es de

Y2.4 - = 142° 59' 0,5" - 90° 52° 59' 0.5"

9= n x cos 50° 59' 0,5" = \frac{\sqrt{3}}{2} x cos 50° 59' 0,5" x l = = 1,58 13 86 5 × L

Desarrollo del calculo auterior:

1 log 3 = 1 × 0,477 12 13 0, 238 56 07

+ lg. cos 52° 59' 0,5" = 7, 779 62 92 0,018 18 99

- 62 = 0, 301 03 00

> lg 0,52 13 86 5 7, 7/7

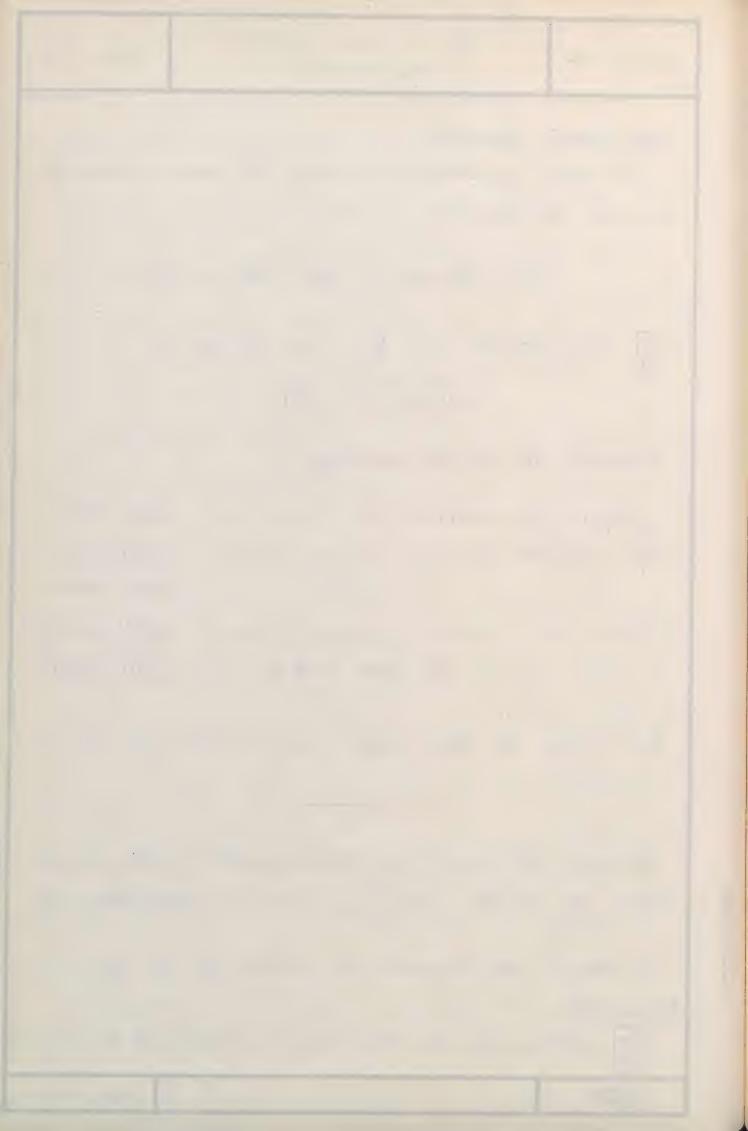
Para el caso del dibujo será: 9=0.52 13 86 5 × 40,9 = 21,3 mm.

Distrucca "fo" entre les dos planos paralelos a I, que contienen la ville: 5 al 2. g 17 al 20 aujecteramente.

Le oblience por diferencias de alturas "E" 7 "g", ya cal culadas.

 $f = 2 (C_4 - g_1) = 2 \times (1, 14 \ 26 \ 15 \ 6 - 0, 52 \ 13 \ 86 \ 5) \times \ell =$

26-11-72



= 1. 24 24 58 2 ... 2

Para el caso particular del dibujo, sera: 1=1.24 24 58 2 x 46.7 = 50, 8 mm.

Distancia "9" de la milices ? al 12 al plane de la care madre.

na enadrada 1.2-2-4, y de la 17 al 20 a la care madre.

da opuesta 20 al 24.

se obtiene girando prenamente la arista 2:11 hasta stocarla paralelamente al plano I, proyectarla regnidamente sobre el plano II.

Para cascularda, determinana prenamente el ariquelo de proyección de dicha arista.

Li consideramos el plano diametral que pera son 3-11

y el centro O del poliedro, dido plano pasara a un

ver por el centro de la cara cuadrada la la; uniendo

ambos centros tendremos de terminado el ejo de giro

de dicha arista 2.11, el mal resa perpendienten a II los pento.

2 y 11 en II, pasaran a ocupai, des pués del giro, las

posiciones 2I y 11I en I, y la arista 2I - 11I esta
cá peoyectada en I en en verdadera magnitud.

Uniendo a continuación 2I y 11I con el centro O

del poliedro, se mos formará el trián quelo isós celes

0-2I-11I, de base "l", altura "b" y lado "a" (tig.?)



al 0-A.2., restauguels en A, de catetos "Ci, "du" e hipotenu-

Le angulo A-2,-11, es al que formen la mista "l" con el plaono de le come cuestra da 1 al is,

intendo

te sende

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} \ell = \frac{0.70 7! 06 78...}{2 \sqrt{\ell^2 - m^2}} = \frac{0.70 7! 06 78...}{1.34 37 15 13...} = 0.52 62 32 65$$

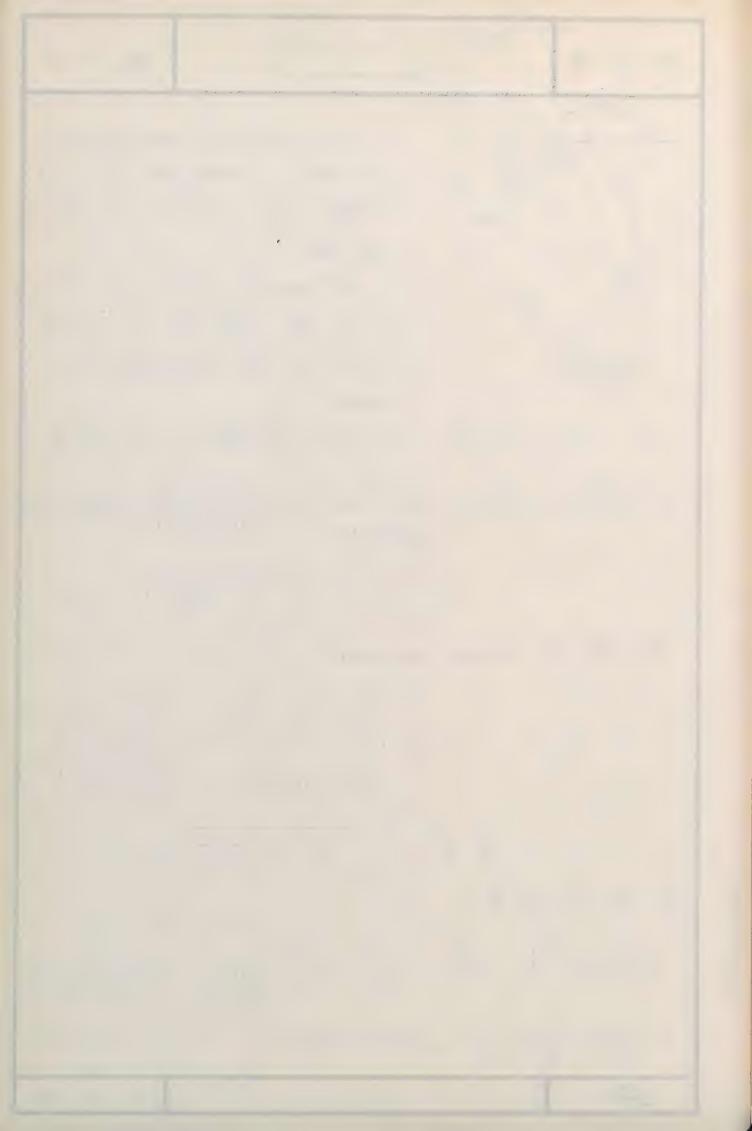
$$| \times A - 2_z - 0 = 58^{\circ} 14' 55, 5"$$

desarrollo del calculo auterior:

y por whom parte

$$cos(0-2z-B) = \frac{\ell}{a} = \frac{\ell}{2a} = \frac{\ell}{2x} = \frac{1}{2x \sqrt{\ell^2 - m^2}} = \frac{1}{2x \sqrt{34 \sqrt{37} / 5} / 3}.$$

= - - 0, 37 21 22 68 ...



& 0.2. 8 = 68° 9' 16, 0°

Desarrollo del calcule auterior.

lg 1 = 0,000 00 00

lg 2 = 0,301,03 00

+ $\frac{1}{3}$ 1, 34 37 15 13 ... = 0, 128 30 72 = -0, 429 33 72 $\frac{1}{3}$ cos $(0-2_{\bar{1}}-B)$ = 7, 570 66 28

4 0-21-B = 68° 9' 16,7"

y por lo tanto tendremos que.

 $S = \langle A - 2_{I} - 11_{I} = 58^{\circ} | 14' | 55,5'' + 68^{\circ} | 9' | 16,7'' = 126^{\circ} | 24' | 12.2''$

Li proyectamos la arista 2_I-11_I sobre el plano III, el angulo de proyección será:

126° 24' 12,2" - 90° = 36° 24' 12,1"

por lo que finalmente tendrenos:

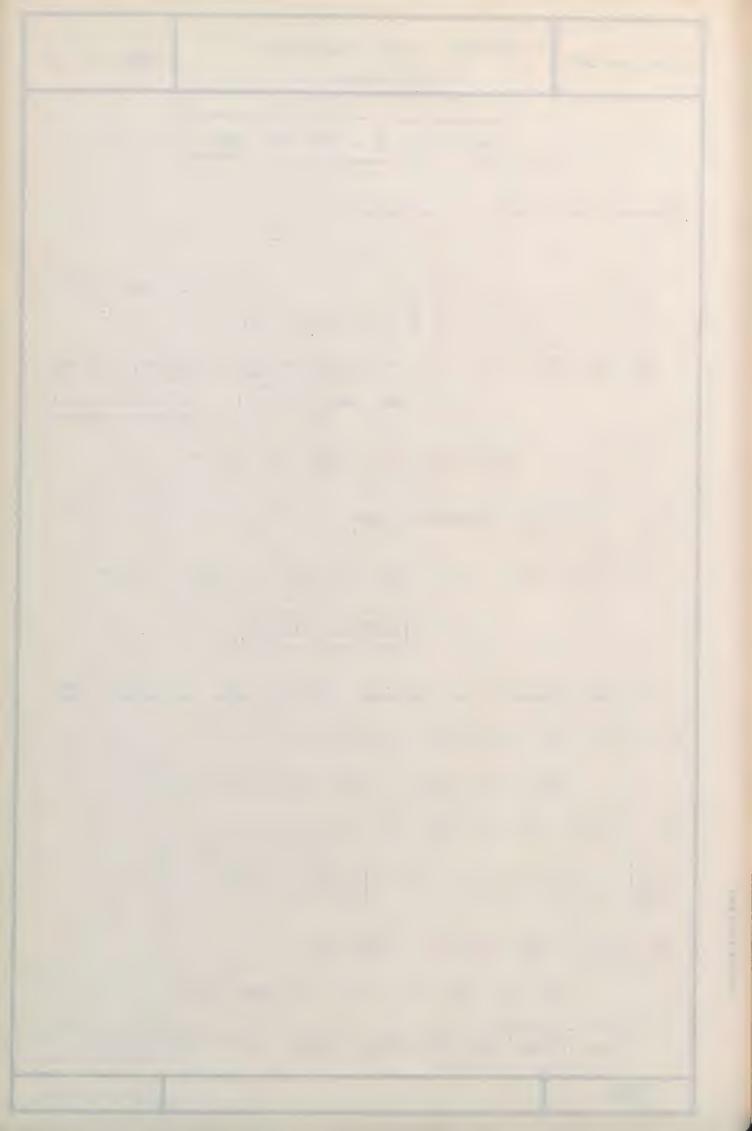
92 = l co 36° 21' 12,2" = 0,80 48 58 89.... l

Desarrollo del calculo anterior:

ly cos 36° 24' 12, 2" = 1, 905 7/97

ws 36° 24' 12, 2" = Antily 7, 905 71 97 = 0,80 48 58 89.

UNE A4 210 X 2



7 = 4.30 48 58 89 × 40.7 = 32.9 mm.

Andrecea '52' entre los dos planos paralelos a II, que contienen los meters 9 al 12 ; 13 al 16 respectivamente.

de Melen por diferencia de las activas "es" y j" y a

Para el caso particular del dibujo, sera: i= 0.67 55 134 × 40.9= 27.6 mm

Radio "1," de la circumitamencia escarraira als madrades de mértices 5 al 8 y 17 al 20.

Esta representado en su verdadera magnitud. es el plano II, por el regmento 5.0, suma del 5.8 y del 8.0. In valores son:

 $5-B = N \times new 52^{\circ} 59' 0.5''$ (ver calculo de "c") $B-0 = \frac{l}{2}$

 $r_1 = n$ an 52° 59' $6.5'' + <math>\frac{\ell}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \alpha_{11}, 52^{\circ}$ 59' $0.5'' + <math>\frac{1}{2}\right) \times \ell =$

UNE A4 210 X

30 - 11 - 73



= 1.19 14 88 4 &

Desarrollo del calculo auterior:

 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ = $\frac{1}{2}$ x 0,477 12 13 = 0,238 56 07

+ lg sen 52° 59' 0,5" = 7,902 25 42

0, 140 81 49

- lg 2

= -0,301.03.00

Antilog 7, 839 78 49 = 0, 69 14 88 4 ...

1= (0,69 14 88 4... + 0,5 ft = 1.19 14 82 4... l

Para el caso del dibujo, rerà: 17 = 1.19 14 88 4 × 40,9 = 48,7 mm

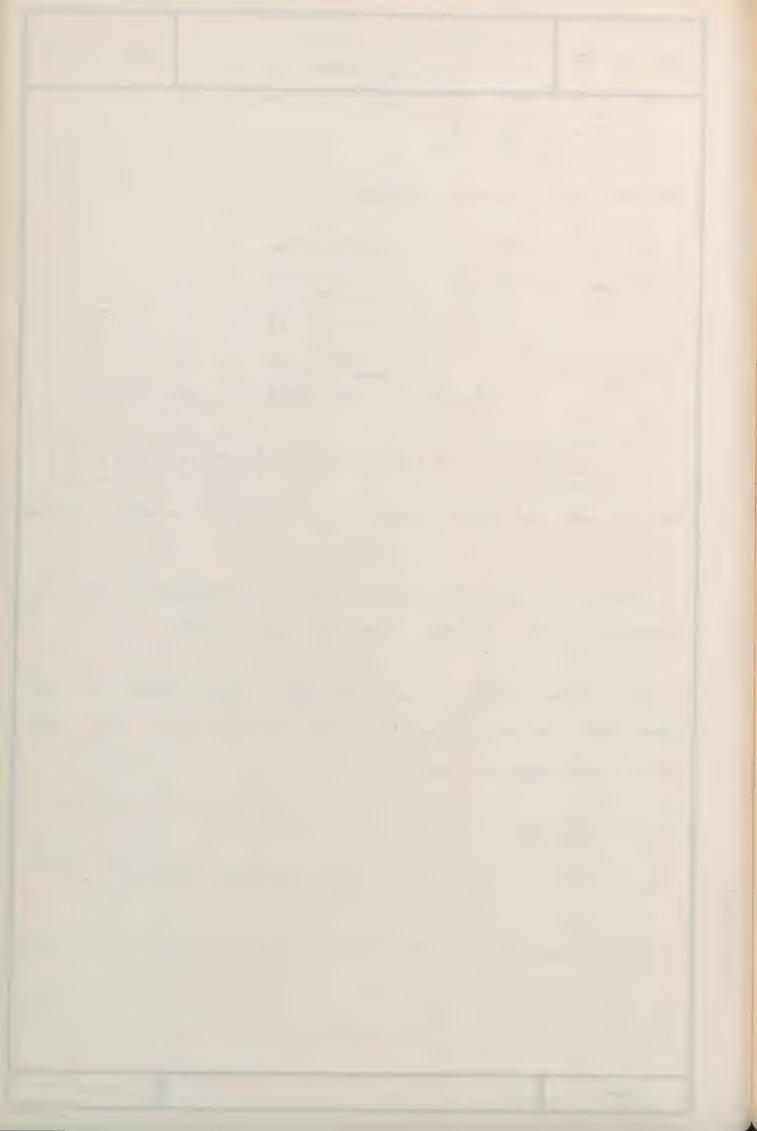
radio " 12" de la circumprancia circumscrita a los cuadrados de mérticos 9 al 12 y 13 al 16.

Età representado en su verdadesa magnitud, en el plano II, por el segmento 11-0, suma del 0-2 3 del 2-11. Luo valores on:

 $0-2 = d_4 \times l = \frac{\sqrt{2}}{2} l$ 2-11 = l seu 36° 24' 12,2'' (ver calculo de "j") } de donde

 $\boxed{\Gamma_2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \text{ sen } 36^{\circ} 24' \ 12.2''\right) \\ \ell = \left(0.7071068 + 0.5934664\right) \\ \ell$

= 1,30 05 73 9 ... l



Desanollo del calculo auterior:

 $\frac{1}{2}$ by $2 = \frac{1}{2} \times 0.301 \ 03 \ 00 = 0.150 \ 5150$

- 4 2 =

=-0,30/03 00

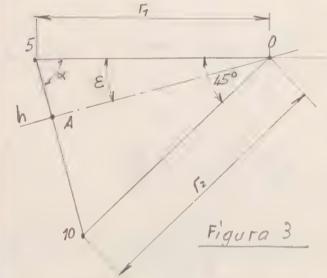
Intilog 7,849 4850 = 0,70 71 068 ...

ly seu 36° 24' 12, 2" = 7, 77 33 76 2... = 0,59 34 66 4 -...

[12 = (0,70 71 06 8 ... + 0,59 34 66 4...) l = 1,30 05 73 2... l

Para el caso del dibujo, será: 12 = 1,30 05 73 2 × 20.9 = 53,2 mm

songrele "E" out forme el je de simetrice "h", en la proyeccion II, con el eje parelelo a "X"

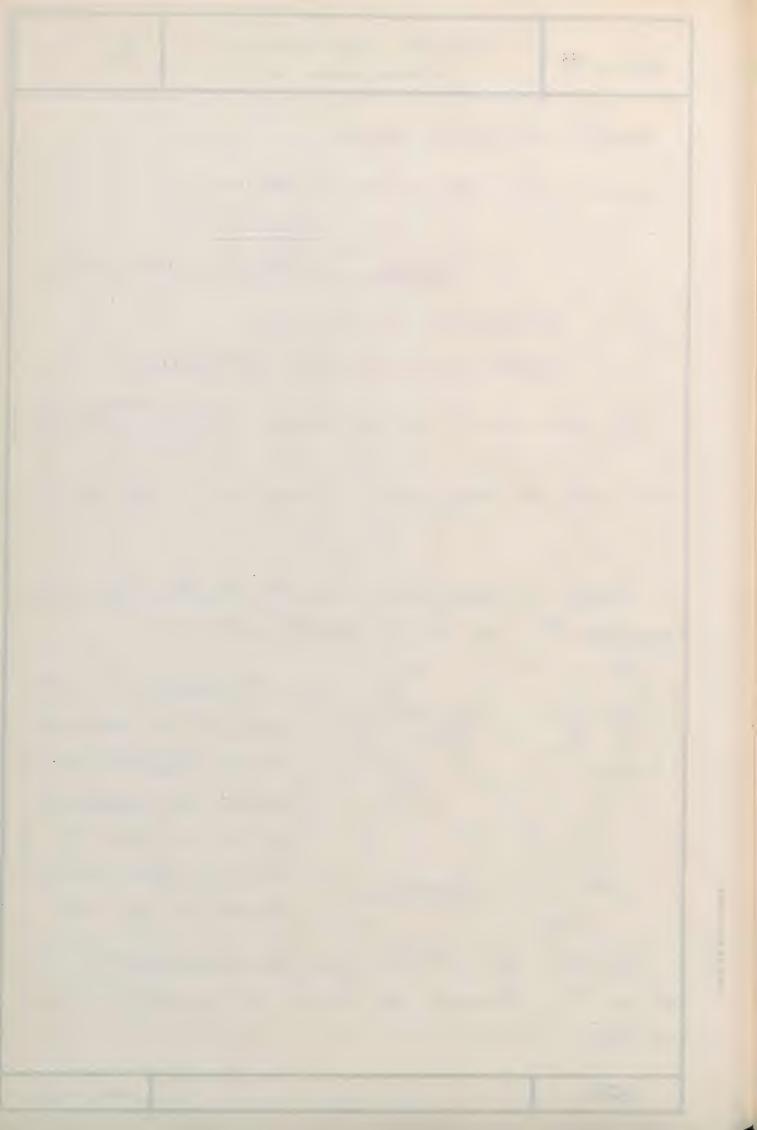


Refiniendonos a la proyección II, el triánquelo
5-0-10 (fig. 3), tiene lo
valores ya calculados
5-0 = 1, 10-0 = 12, 7
el ángulo que forman estos lados, es de 45°.

da altura DA de este triangulo, correspondiente a "O", est el eje "h" besseado, que forma el angulo "E" con el lado 5.0.

(G)

30 - 11 - 73



UNE A4 210 X 2

en le construer loigonomètres de tenquels étécnanquels, comprométées, et auquels comprométées, et détiene o tos de sus anquels por la jornale.

que aplicada al enso particular de la fig. 3. haciendo

a = 12; b = 17; Y = 450 2 x = 0-5-10, 7

terriend en cuent que ma 45° = cos 45° = \frac{\sqrt{z}}{2}

y que to x = cto E, tendremos

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

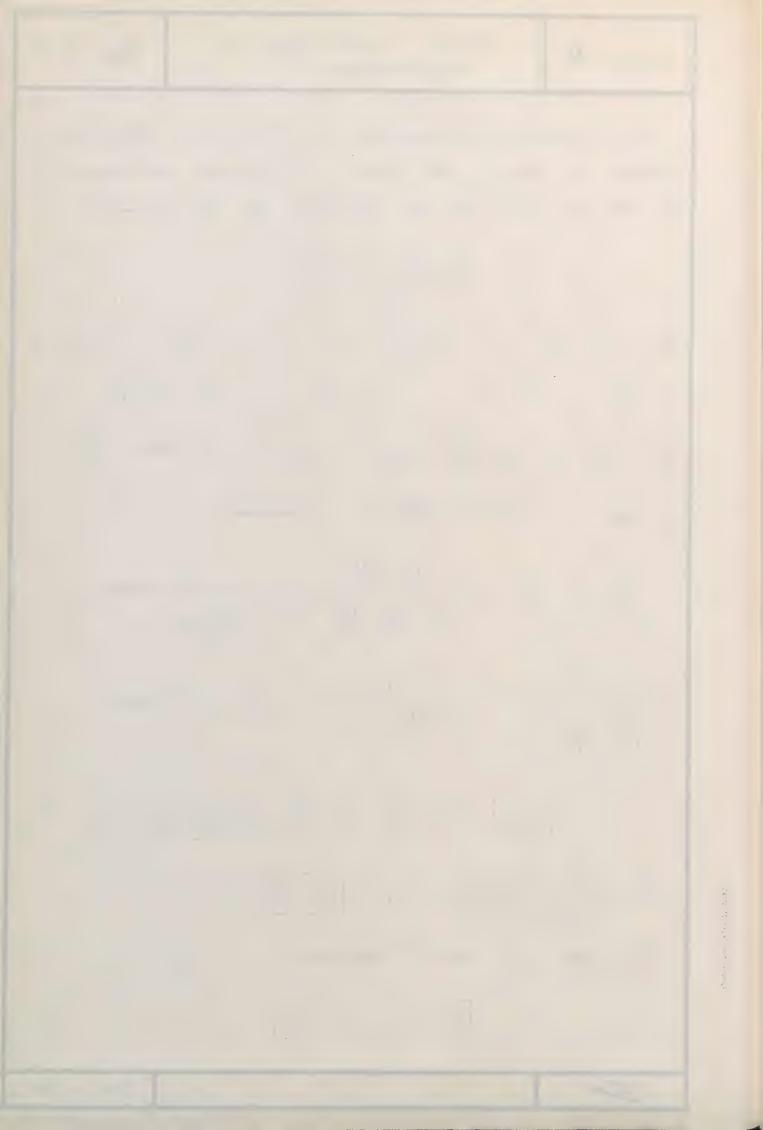
$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \times \frac{2}{|\Gamma_2|} - 1} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2}} - 1$$

$$\boxed{\frac{1}{5}} = \sqrt{2} \times \frac{5}{5} - 1 = \sqrt{2} \times \frac{1.19 \ 14 \ 88 \ 4 - ... \ l}{1.30 \ 0.5 \ 73 \ 2 - ... \ l} - 1 = \sqrt{2} \times \frac{1.30 \ 0.5 \ 73 \ 2 - ... \ l}{1.30 \ 0.5 \ 73 \ 2 - ... \ l}$$

$$= \sqrt{2} \times \frac{1, 19}{1, 30} \frac{14}{0.5} \frac{28}{73} \frac{4}{2} - 1 = 0, 29 55 97 3 \dots$$

Desarrollo del cálculo auterior:



$$\frac{1}{2} l_{7} \cdot 2 = \frac{1}{2} \times 0,301 \quad 03 \quad 00 = 0,150 \quad 51 \quad 50$$

$$+ l_{7} \cdot 1.19 \quad 14 \quad 88 \quad 4 = 0,076 \quad 68 \quad 98 \quad + 0,226 \quad 60 \quad 48$$

CUADRO SINÓPTICO DE LAS MAGNITUDES COMPLEMENTARIAS

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
n	<u>√3</u> ℓ	0, 86 60 25 l
f ₁	2 (C4 - g1)	1. 24 24 58 l
91	1/3 x cos 52°59'05"l	0. 52 13 87 £
f ₂	2 (c4 - 92)	0, 67 55 13 L
92	cos 36° 24' 12.2" * }	0,80 48 59 L
Γ,	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen } 52^{\circ} 59' \text{ 0.5"} + \frac{1}{2}\right) \times \ell$	1, 19 14 88 l
Γ ₂	$(\frac{\sqrt{2}}{2} + \text{sen } 36^{\circ}24' 12.2'').!$	1, 30 05 73 l
3	tg ε = V2 × \(\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\	ξε = 0,29 55 97 ε = 16° 28' 3,1"

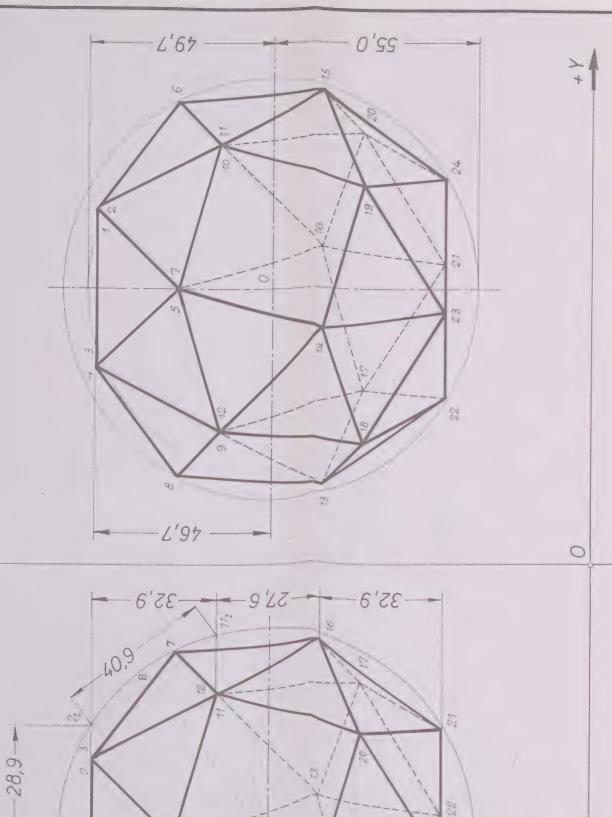
FIGURA CORPOREA

Le obtiene por acoplamients de 32 triangulos equilateros y 6 cuadrados, de lado 40.9 mm. de forma que en cada vértice concurran 4 triangulos y 1 cuadrado

UNE A4 210 X 297



Z+



1420 59'

8'05

ARQUIMEDIANO I

C ₃ = 32	9 = 7	V = 24	A = 60	4 C + 1 C
caras triangulares	caras cuadradas	vértices	aristas	caras de un ángulo sólído:
de	de	de	de	de
Número	Número	Número	Número	Número

ENUNCIADO

187

Representar por el método gráficoanalítico, en los planos I, II y III, el cada vértice concurren cuatro triángulos Arquimediano I, en el que en quiláteros y un cuadrado.

mm, y las coordenadas de su centro La longitud de su lado es de 40,9 0 son: 0 (72, 72, 85) mm.

a esca-Dibujar en formato A3v y la 1:1.

				Escala
				Alumno:
cación				Fecha:
Califi-	Entregada	Propuesta De entrega Entregada	Propuesta	

1+

Escuela Curso

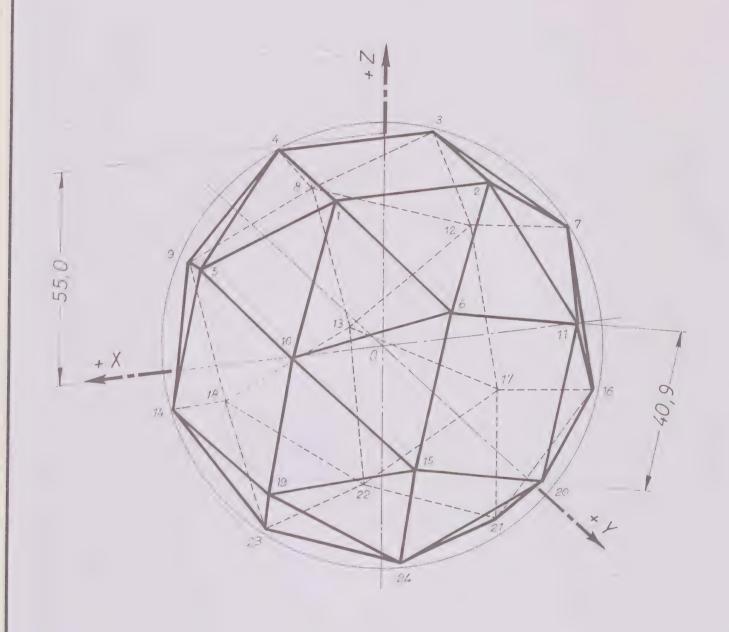
(firma)

mediano

Lámina 33

Curso 19







34

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-amalítico, en los planos I, II g II, el Arquimediano II, en el que en cada vértice concurren cuatro triangulos equilateros que pentagono regular.

La longitud de su lado es de 25,5 mm, 1, las coordenadas de su centro 0, sou: 0 (72, 72. 85) mm. Dibujar en formato A3V g a escala 1:1.

DATOS: O(72, 72, 85) m m $l_{\pi} = 25, 5 m m.$

UNE A4 210 X 297



CONSIDERACIONES PREVIAS

Sequiremos, en el estudio de este arquimediano, las directricas y firamelas querales planteadas en el estudio del "Arquimediano I", lamina 33.

En el caso particular que nos ocupa, determinareonos las magnitudes generales signientes:

l = Arista del Anquimediano II (dato del problema)

a: Radio de la esfera circumscrita

b : Radio de la esfera tangente a las aristas

C3 = Radio de la esfera tangente a las caras trianquelanes

C5 = Radio de la esfera tampente a las caras pentagonales

its: Radio de la circumperencia circumscrita a una ca-

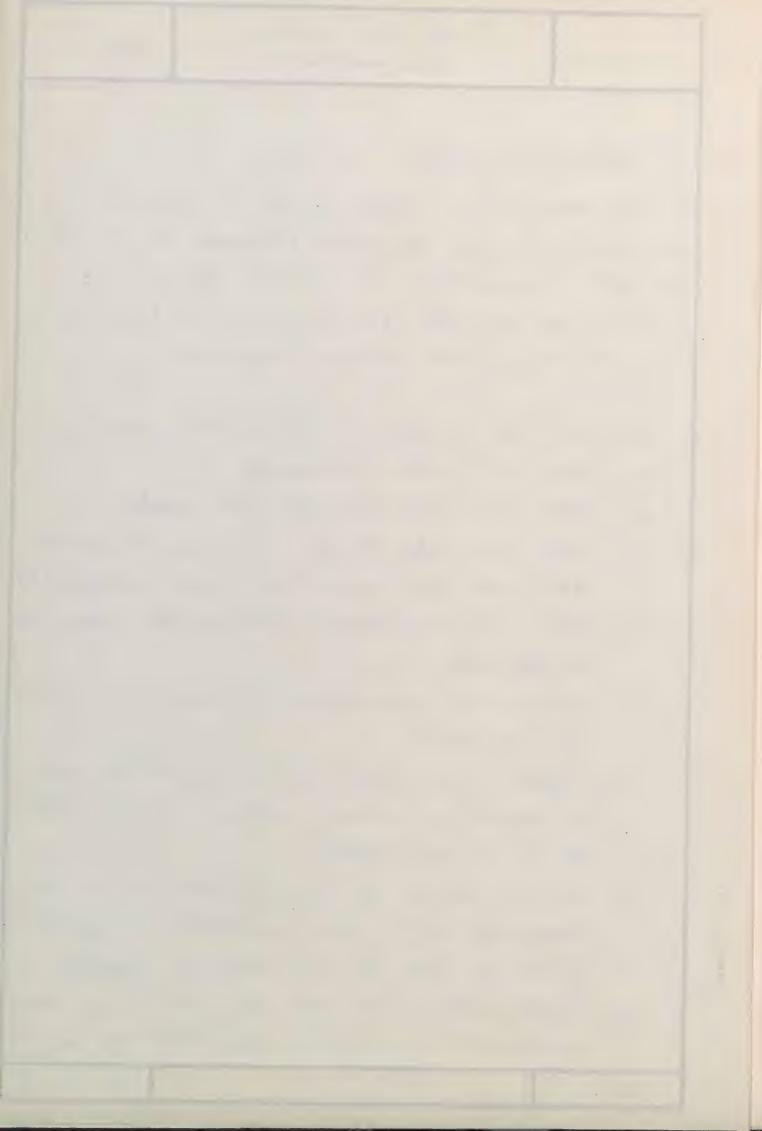
des : Radio de la circumferencia circumscrita a una cara pentagonal

m : Radio de la circumferencia circumscrita al policono obtenido al unir los esctnemos de las aristas de um angulo sólido.

*3 = Imquelo rectiliones del diedes formado por una cara trianquelar, con el plans diametral del arquine-diano, que pasa por una arista de aquella.

05 = Anaulo restetimes del desdes formado por una cara pentagonal, con el plano diametral del arqui-

(50)



medino, que para por una arista de aquella.

13-3 = Angula rectilieros del diedes formado por dos casas taramentares.

13-5 = Angulo aectilines del diedro formado por una a-

5 = Luperfice

V = Volumen.

PROCESO GRÁFICO - ANALÍTICO

El estudio cealizado de este arquienediano, aos indica que tiene 80 caras requiares trianquilares, o 12 caras acquilares pentagonales; 60 minties o 150 aristas.

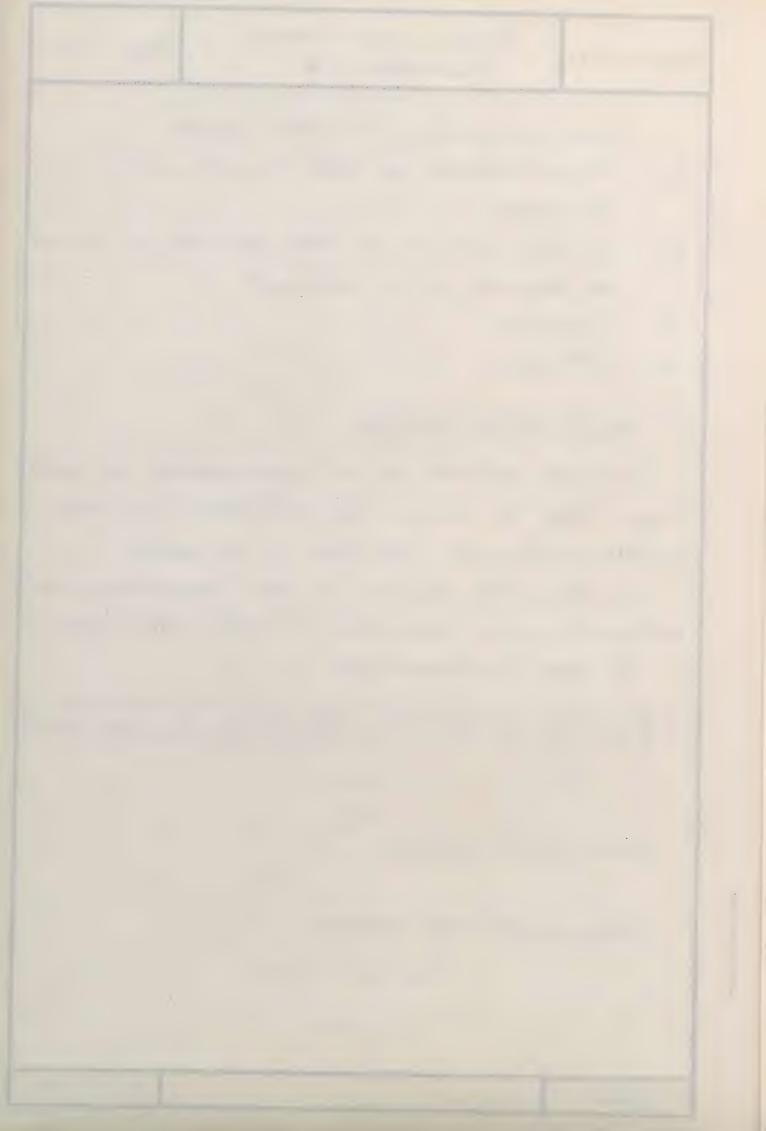
En cada vértice concurren de caras trianquelares, 1 cara pentagonal y, per anciquiente, 5 avistes del mismo.
Asi pues, tendremos que

Arquimediano II (4 P3 + 1 P5); C3=80; C5=12; V=60; A=150

Cálculo de sus magnitudes

Arista "l" del arquimediano

Dato del ejercicio



Rade, in it to incomforme insurence de policie de policie de la since outre de un compete petitodo.

en el verbee à trianqueles equilabres ; un pertagnes in-

bes evatro la des ignales tiènen una longitud ignal a la ouste "?" leven est de una erra inaucula requilar! ; el amosto tendra sono longitud ignal a la
diagonal de un jentagons resquelas de la le.
Lu volo serà que :

$$21 = \alpha = \ell \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

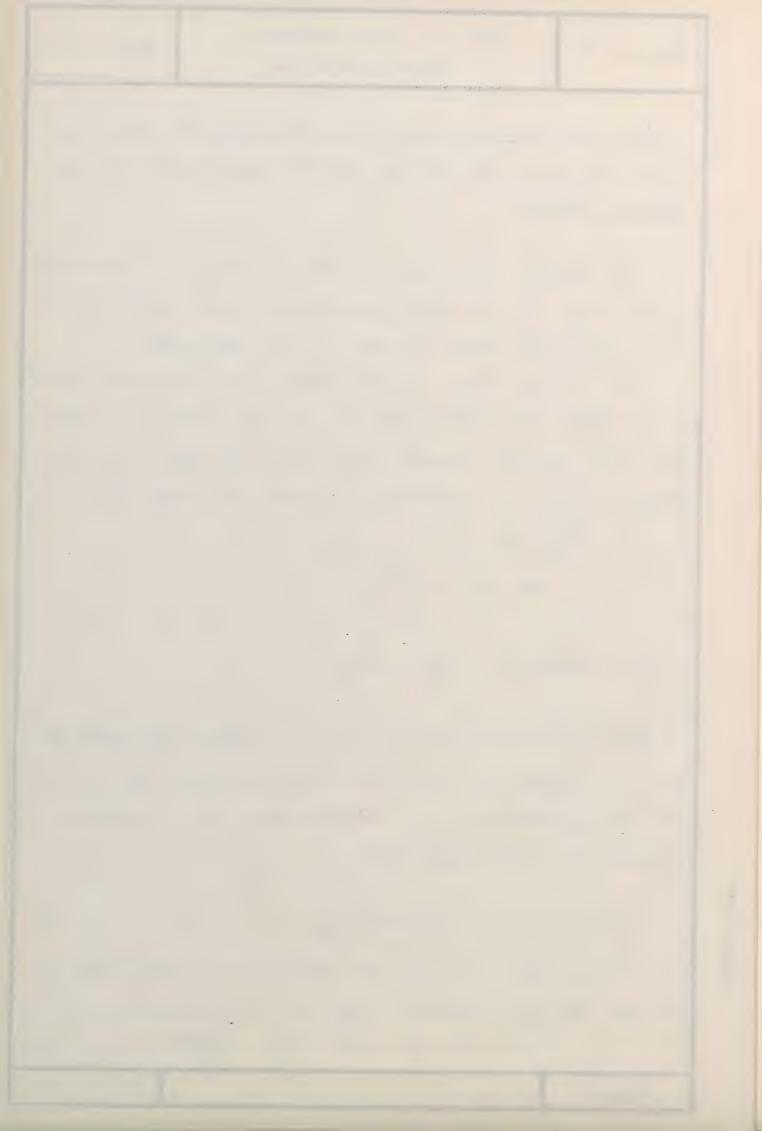
og la relacion
$$\frac{a}{t} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

Ligniendo el mismo proceso de cálculo desanolla do en la lamina 33 para la determinación de « cu el Arquimediano I, y refiriendonos a la misma figura 1, tendremos que

$$m_1 = \frac{\ell}{2 \cos \beta} \tag{1}$$

en la que sen β se deduce en funcion de $\cos \beta$, que es a su vez la solución real de la ecuación cubica $\frac{8}{100}$ cos β - 4 cos β = $\frac{a}{f}$ = $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (2)

17-12-72



THE STATE OF THE S

from el reso perticular que mos osupos.

Vérciendo en (2) ca $\beta = \infty$, tendecuras . $8 \times^2 - 4 \times = \frac{\sqrt{F} + 1}{2} = 0$

$$x^{2} - \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{5} + 1}{6} = 0$$
 (3)

q= $-\frac{\sqrt{5}+1}{16}$, en la general

$$x^3 + p > c + q = 0$$

va financia de lardans mos permite obtener "="

$$R = \left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3 > 0$$

lo cual sucede en este caso, ga que

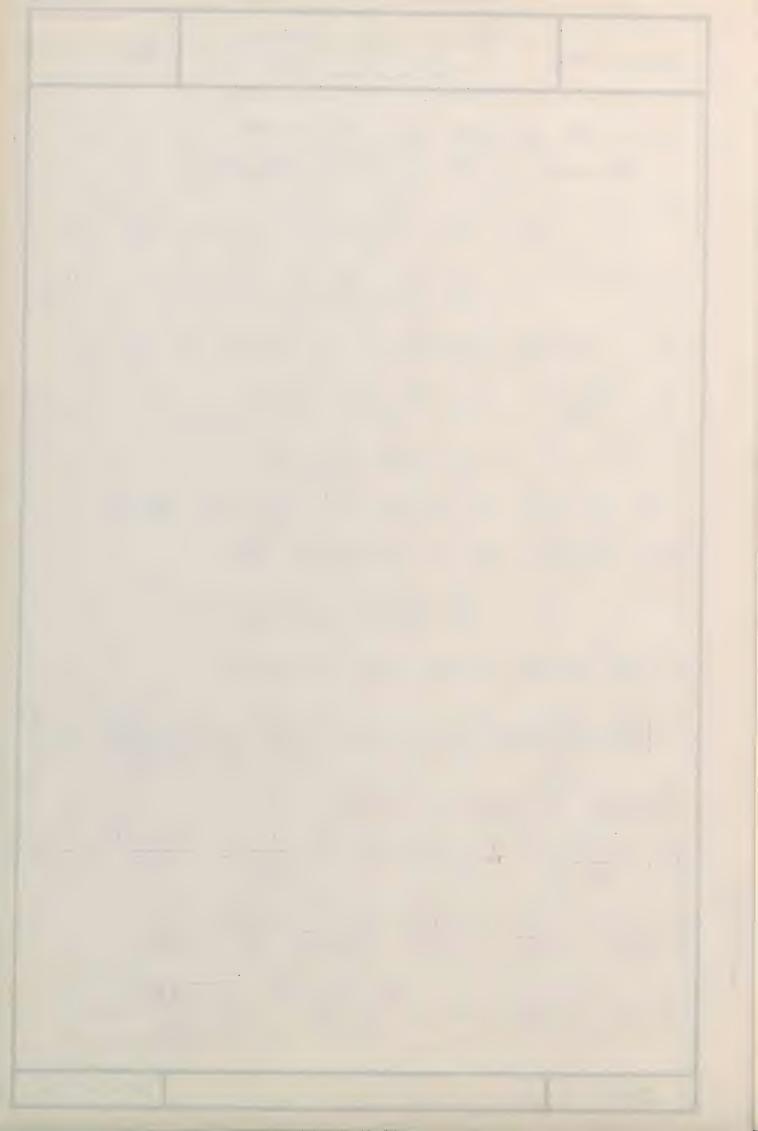
$$\boxed{R} = \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{16}:2\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}:3\right)^3 = \frac{3+\sqrt{5}}{5/2} - \frac{1}{216} = \frac{17+27\sqrt{5}}{13824} > 0$$

Desarrollo del calculo auterior:

$$\left[E\right] \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}+1}{16}:2\right)^{2} + \left(-\frac{1}{2}:3\right)^{3} = \frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^{2}}{32^{2}} - \frac{1}{2^{3} \cdot 3^{3}} = \frac{5+1+2\sqrt{5}}{32^{2}} - \frac{1}{2^{3} \cdot 3^{3}}$$

$$= \frac{6+2\sqrt{5}}{32^2} - \frac{1}{2^3 \times 3^3} = \frac{3+\sqrt{5}}{16\times 32} - \frac{1}{2^3 \times 3^2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2^9} - \frac{1}{2^3 \times 3^3} = \frac{1}{2$$

$$\frac{2^{3} \times 3^{4} + 2^{3} \times 3^{3} \times \sqrt{5} - 2^{9}}{2^{12} \times 3^{3}} = \frac{3^{4} + 3^{3} \sqrt{5} - 2^{6}}{2^{9} \times 3^{3}} = \frac{17 + 27 \sqrt{5}}{13824} > 0$$



y por consequents:

$$+\sqrt[3]{-\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{16}:2\right)}-\sqrt{\frac{17+27\sqrt{5}}{13824}}=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{32}+\sqrt{\frac{17+27\sqrt{5}}{13824}}}+\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{32}-\sqrt{\frac{17+27\sqrt{5}}{13.824}}}$$

Desarrollo del calculo auterior:

$$\frac{\sqrt{5}+1}{32} = \frac{3,23}{32} = \frac{60}{32} = \frac{67}{97} = \frac{74}{74} = \frac{99}{79} = \frac{79}{10} = \frac{10}{12} = \frac{12}{12} = \frac{12}{12}$$

$$\frac{17 + 27\sqrt{5}}{13.824} = \frac{17 + 60, 37}{13.824} = \frac{35}{13.824} = \frac{35}{13.824} = \frac{37}{13.824} = \frac{35}{13.824} = \frac{37}{13.824} = \frac{37}{13.8$$

$$\sqrt{\frac{17+27\sqrt{5}}{13824}} = \sqrt{0.00559706563892} = 0.07481354...$$

$$\frac{1}{3}$$
 is 0.17 59 40 66 = $\frac{1}{3}$ (2.245 3662 - 3) = 0.748 4554 -1 = $\overline{1}$, 748 4554

$$\frac{1}{3}$$
 $\frac{1}{5}$ 0.02 (3 13 58 = $\frac{1}{3}$ (1.420 18 00 - 3) = 0,473 3933 -1= $\overline{1}$, 473 3933



₹ 0,02 €3 13 52 . Antilog. 7,473 3933 = 0,29 74 35 82 ...

La de voler aestantes de la ecuación cubica, son imagina-

Del valor ci /3 = 0, 85 72 80 69 ... se diduce

Pemperobación mumérica de la rais rual

Vanos a comprobar omméricamente si la craix rual obtenida para la ecuación (3), la verifica:

Dicha rais es

x = co \beta = 0, 85 77 80 69

siendo la ecuación:

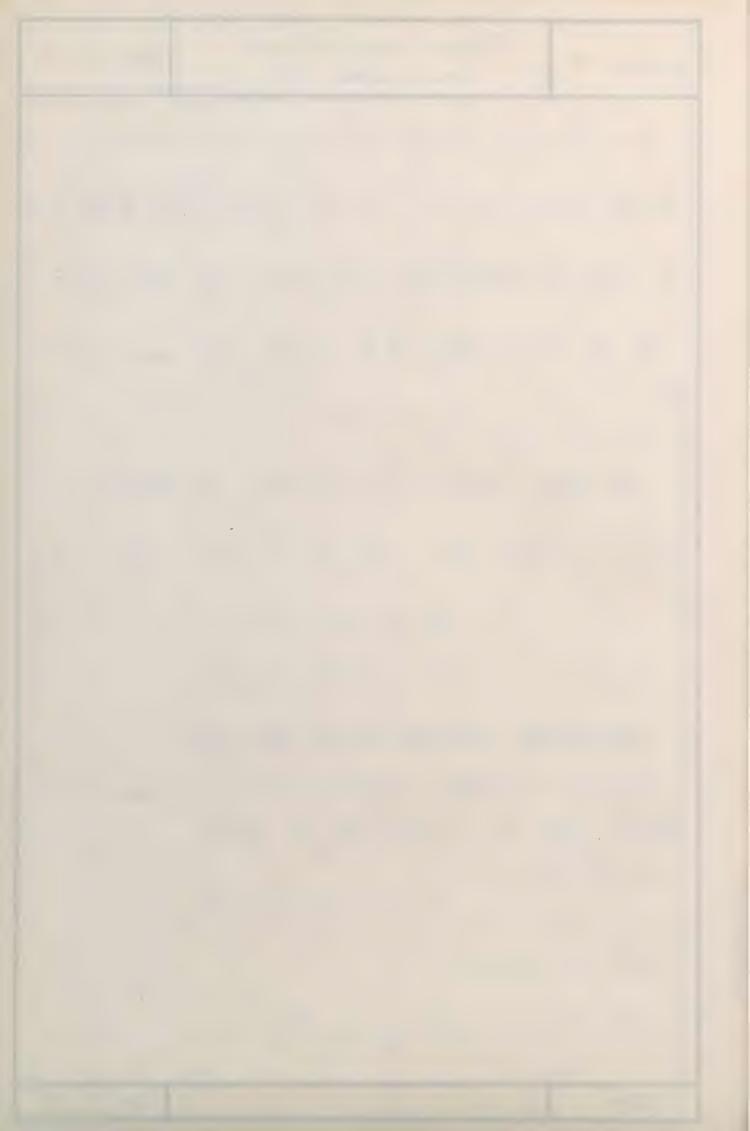
$$2c^{3} - \frac{1}{2} \times c - \frac{\sqrt{5} \cdot 1}{16} = 0$$

El

17-12-72

(4)

JNE A4 210 X 29



 x^{3} = 0.73 57 87 71 × 0,85 77 80 69 = 0.63 10 85 11 88 67 00 00 59 37 07 10 31 99 0.63 11 44 48 95 71 51 99

 $\frac{1}{2} \propto = 0.85$ 77 80 69 ; 2 = 0.42 88 90 35

 $x^3 - \frac{1}{2}x = 0.63$ 11 44 49 - 0,42 88 90 35 = 0.20 22 54 14 --- =

 $\frac{\sqrt{5}+1}{16} = 0.20 \ 22 \ 54 \ 25 \dots$

on un evror absolute de 0,0000 00 13 l'admintle)

y cuyo cuntado mir comprueba la exactitud harta la

cipa 10-7. (0.20 22 54 2)

De acuerdo con el resultado obternedo en (4) y composo. bado, de

sen B = 0. 51 40 15 84

oftendreus finalmente:

m= l = 1 2 seu B 2 x 0.51 40 15 84 = 1.02 80 31 68 l= 0,97 27 32 67. l

(3)

17-12-52



Radio "a" de la estera incumerita

Aplicando la formula general [1] (ver lan. 33)

$$\boxed{a} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - m^2}} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - (0.97\ 27\ 32\ 67...\ell)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1 - (0.97\ 27\ 32\ 67...\ell)^2}} \ell = \frac{\ell^2}{2\sqrt{1 - (0.97\ 27\ 32\ 67...\ell)^2}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{1-0.74}} = \frac{1}{2\sqrt{0.053791527146711}} \ell = \frac{1}{2\sqrt{0.0537911527146711}} \ell = \frac{1}{2\sqrt{0.053791152714671}} \ell = \frac{1}{2\sqrt{0.053791152714671}} \ell = \frac{1}{2\sqrt{0.053791152714671}} \ell = \frac{1}{2\sqrt{0.0537911}} \ell = \frac{1}{2\sqrt{0.0537911}} \ell = \frac{1}{2\sqrt{0.0537911}} \ell = \frac{1}{2\sqrt{0.053791}} \ell = \frac{1}{2\sqrt{0.0537911}} \ell = \frac{1}{2\sqrt{0.0537911}} \ell = \frac{1}{2\sqrt{0.053791}} \ell = \frac{1}{2\sqrt{0.053791}} \ell = \frac{1}{2\sqrt{0.0537911}} \ell = \frac{1}{2\sqrt{0.053791}} \ell = \frac{1}{2\sqrt{0.0537911}} \ell =$$

$$= \frac{1}{2 \times 0, 23 \ 19 \ 27 \ 20} = \frac{1}{0, 46 \ 38 \ 58 \ 40} = 2, 15 \ 58 \ 30 \ 31 \dots 2$$

Radio "b" de la esfera taugente a las axistas

Aplicando la formula general [3] (ver lan. 33), tendremos:

$$\boxed{b} = \sqrt{a^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{(2.15583031 - \ell)^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{2.15583031^2 - 0.25} \times \ell =$$

$$=\sqrt{4,6476043255146961-0.25} = \sqrt{4,3976043255146961} =$$

cara trangular regular de lado "l"

39

20 - 12 - 78



de demuestra en germetria es

$$d_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \ell$$

Cara pentagonal regular, de lado "l"

Le demucita en geometria es

$$d_5 = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} \ell$$

Radio "C3" de la enfera tonquete a las caras triangulares regulares de lado "l"

Apticando la formula general [2] (rer lain. 3), tendremer:

$$\begin{bmatrix} c_3 \end{bmatrix} = \sqrt{a^2 - (d_3)^2} = \sqrt{(2, 15 58 30 31...\ell)^2 - (\frac{13}{3} \ell)^2} =$$

$$=\sqrt{4.6476043255146961-\frac{1}{3}} \times \ell$$

ganales regulares de lado "l"

CC

20 - 12- 72



depresents la formula general [2] (ver lan. 33), tendremes:

$$C_5 = \sqrt{a^2 - (d_5)^2} = \sqrt{(2, 15 58 30 31 - \ell)^2 - (\sqrt{5 + \sqrt{5}} \ell)^2} =$$

$$=\sqrt{(2, 15 58 30 31 -)^2 - \frac{5 + \sqrt{5}}{10}} \times \ell =$$

Angulo metilines "x;" del diedro formado por una cana truangular, con el plano diametral del arquine deans que pasa por una arista de aguélla.

Je determina en función de su transporte por la los comula general [5] (ver lan, 3):

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{2 C_3}{\sqrt{4 (d_3)^2 - \ell^2}} = \frac{2 \times 2,07708233...\ell}{\sqrt{4 (\frac{\sqrt{3}}{3} \ell)^2 - \ell^2}} = \frac{4,15416466}{\sqrt{4 \times \frac{3}{9} - 1}} = \frac{2 \times 2,07708233...\ell}{\sqrt{4 \times \frac{3}{9} - 1}}$$

= 4, 15 41 64 66 × $\sqrt{3}$ = 7, 19 52 24 36 --- 1



Angula rediluno "vig" del diedeo formado por una qua pentaganal regular, con el plano diametral del arguionediano que pusa por una carista de aquella

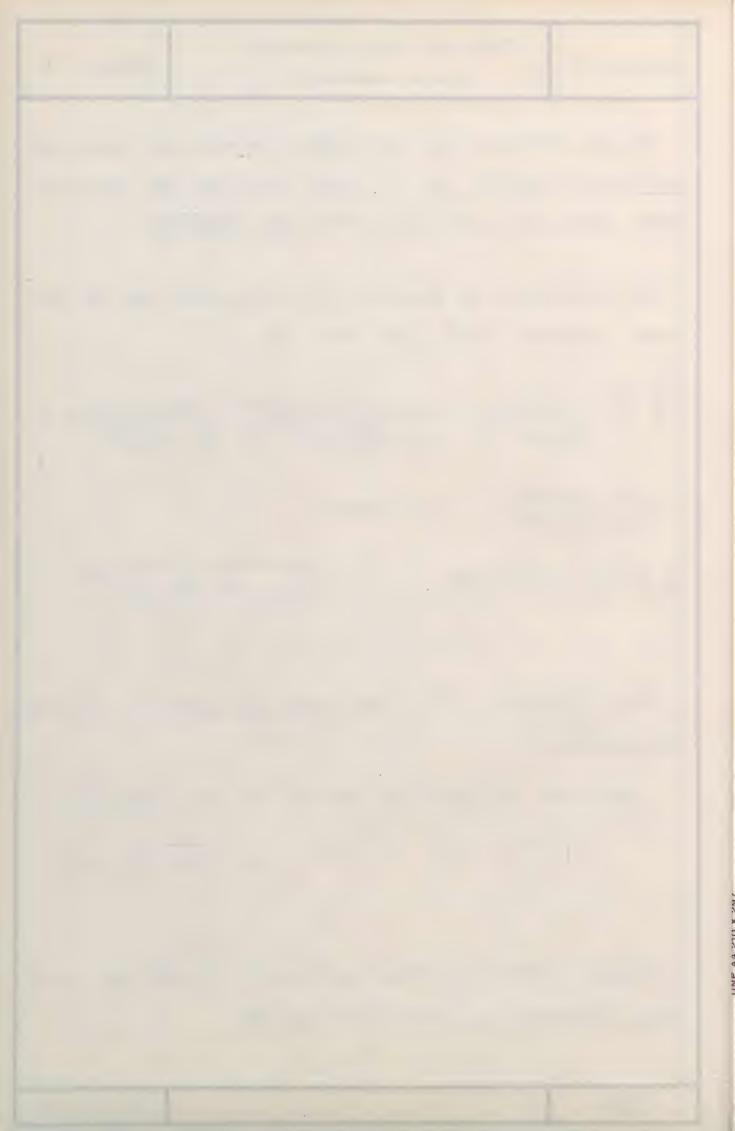
le détermina en troncion de su tanquete, por la foir

$$\begin{bmatrix}
\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\
\end{bmatrix} = \frac{2 \times 1,98090826 \cdot l}{\sqrt{4 \left(\sqrt{\frac{5+15}{10}} \cdot l\right)^2 - l^2}} = \frac{3.96181652}{\sqrt{4 \times \frac{5+\sqrt{5}}{10}} - 1} = \frac{2 \times 1,98090826 \cdot l}{\sqrt{4 \times \frac{5+\sqrt{5}}{10}} - 1}$$

Inquilo rectiline o "Y3-3" del diedro formado por do mas

Aplicando la fórmula general [4] (ver lan 3)

Longuis rectilines "43-5" del diedes formado por una sera taiamentar y una pentagonal



Apliando la terrinta general [4] les dans 11)

Anna Patriol "S" del a summed mo

Le compone de 20 euro tranquiares q 12 pentagonales, regulares q de l'ado "l"; la superficie total serà:

$$S = 80 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \ell^{2} + 12 \times \frac{\sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}}{4} \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{3} + 3 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}\right] \cdot \ell^{2} = \left[20 \sqrt{$$

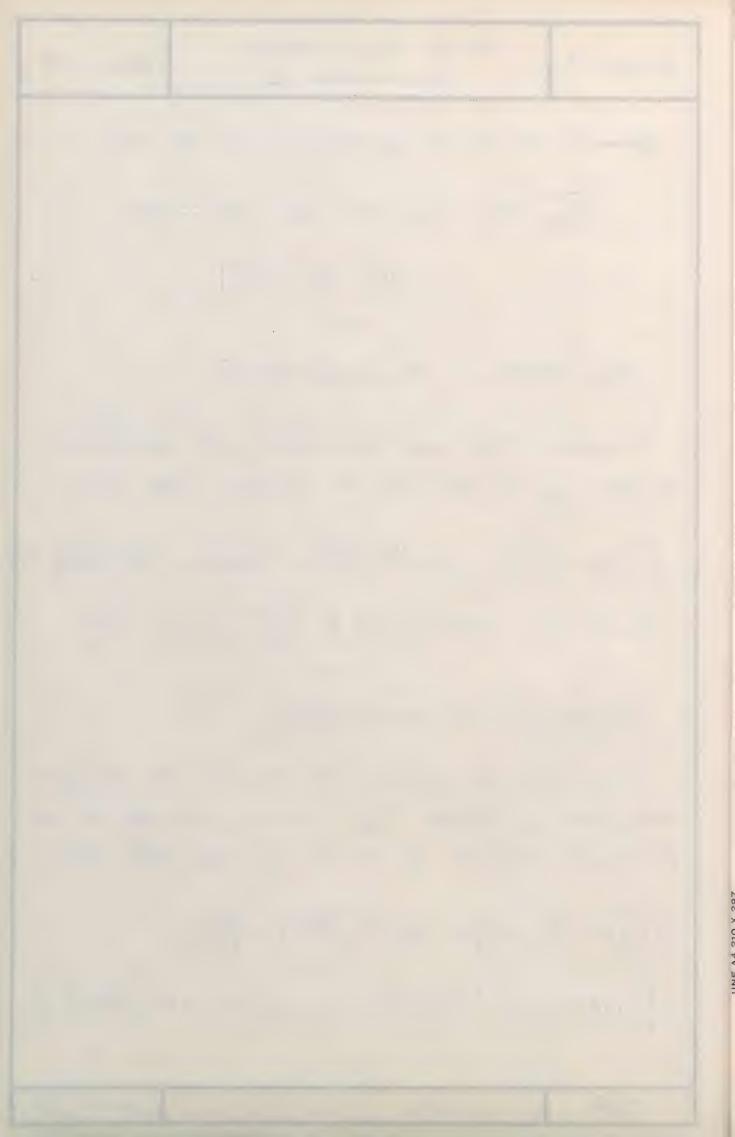
$$= \left[34,64 \ 10 \ 16 \ 2 \ + \ 20,64 \ 57 \ 28 \ 8\right] \times \ell^{2} = \left[55,28 \ 67 \ 45 \ 0 \dots \ell^{2}\right]$$

Volumen "V" del arquimediano

Je compone de la suma de 80 piramides de base trianquelar q altura "C3" q de 12 piramides de base pentagonal cequelar q altura "C5"; su valor serà:

$$V = \left[80 \times \frac{\sqrt{2}}{4} \ell^2 \times \frac{C_3}{3} + 12 \times \frac{\sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}}{4} \ell^2 \times \frac{C_5}{3} \right] =$$

$$= \left[34,64 \ 10 \ 16 \ 2 \times \frac{2.07 \ 70 \ 82 \ 3}{3} + 20,64 \ 57 \ 28 \ 8 \times \frac{1,98 \ 07 \ 08 \ 3}{3} \right] \times \sqrt[3]{3} =$$



 $= \left[23, 98 \ 40 \ 80 \ 5 \ + \ 13, \ 62 \ 24 \ 31 \ 8 \right] \cdot \ell^3 = \left[37, \ 61 \ 65 \ 12 \ 3... \ \ell^3 \right]$

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
Q	$\frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2-m^2}}$	2, 15 58 30 l
Ь	$\sqrt{a^2-\frac{\ell^2}{4}}$	2, 09 70 47 l
C3	$\sqrt{a^2-(d_3)^2}$	2, 07 70 82 {
C ₅	$\sqrt{q^2 - (d_5)^2}$	1, 98 09 08 £
d ₃	<u>√3</u> ℓ	0, 57 73 50
ds	V 5 + V5	0, 85 06 51 £
m	2 sen B	0, 92 27 33 l
\prec_3	$tg \propto_3 = \frac{2c_3}{\sqrt{4(d_3)^2 - \ell^2}}$	tg ×3 = 7. 19 52 24 ×3 = 82° 5′ 15.6″
ds	$tg \alpha_3 = \frac{2 c_2}{\sqrt{4 (d_3)^2 - \ell^2}}$ $tg \alpha_5 = \frac{2 c_2}{\sqrt{4 (d_5)^2 - \ell^2}}$	15 45 = 2, 87 84 28 45 = 70° 50' 31,8"
43-3	≈ 3 + ≈ 3	4 ₃₋₃ = 164° 10' 31,2"
43.5	≪ ₃ + ≪ ₅	Ψ ₃₋₅ = 152° 55' 47.4"
S	[20 V3 + 3 V25 + 70 V5] = 12	55, 28 67 45 L ²
V	$\left[20\sqrt{3} \times \frac{C_3}{3} + 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \times \frac{C_5}{3}\right] \times \ell^2$	37, 61 65 12 £ 3
B	$\cos\beta = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5} + 1}{32} + \sqrt[4]{\frac{17 + 27\sqrt{5}}{13.824}}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5} + 1}{32}} - \sqrt{\frac{17 + 27\sqrt{5}}{13.824}}$	cos B = 0.85 77 80 69 B = 30° 55′ 54,1"
13	sen $\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta}$	sen B = 0,51 40 15 84



Vara su travado ours valturmes de estas calculados por las formulas auteriores, de procesos gráficos o de cotas complementarias cuyo cálculo estudia emos posterioremente. To das las omagnistades las obtendremes, en furnicion del lado "l_{II}" del arquimediano, de 25.5 mm

Calculemos previamente las riquientes omagnitudes:

 $l_{II} = 25.5 mm$

a = 2.15 58 30 × 25.5 = 55.0 mm

b = 2.09 70 47 x 25.5 = 53,5 mm

C3 = 2,07 70 82 × 25,5 × 53,0 mm

C5 = 1,98 09 08 × 25,5 = 50,5 mm

d3 = 0,57 53 50 x 25,5 = 14,7 mm

d= 0, 85 06 51 x 25,5 = 21,7 mm

él orden de operaciones del trasado gráfico (tom. 34) es el signiente:

L' Lituar el centro 0, de coordenadas 72, 72, 85 mm

Dibujar en I. I g III. las propocciones de la estera circumscrita, de vadio a = 55 n.m.

3º Representa en J. II q III la cara pentaganal



paralela a II 7. un lado (1-5) per pendicular a I.

('ntiticese la ceta" 65" en I 2 III).

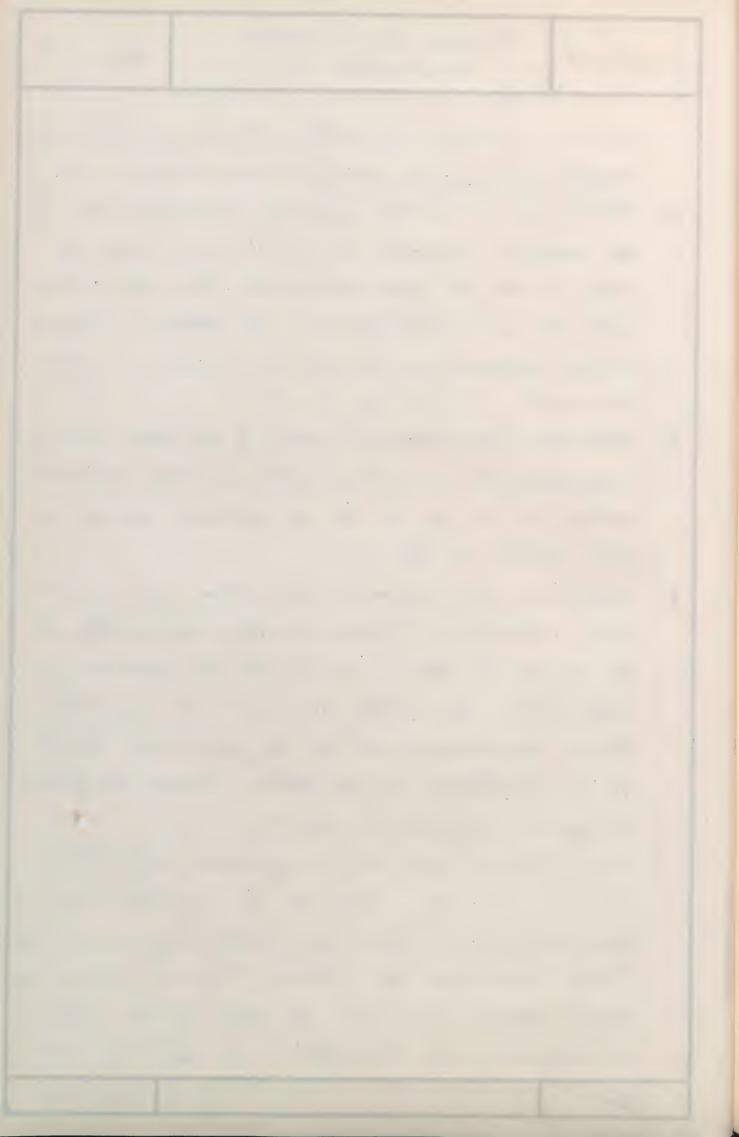
L'Obtener en I, II 9 III las prospecciones del vértice 6 de la cara contigna triangular de arista 1-5 hasta colocar el mirtice 6 sobre la esfera circumscrita. Para ello se hasa centro en 1, con radio ignal a la altera de la cara 1-5-6 9 ne trasará un arco que corte en 6, a la esfera circumscrita.

- 5° Determinar las proyecciones en I g II de dicho mértice 6, g requidamente en I, II g II de la vértices 7 de 10 (la pirtices 6 al 10 son la de un pentagono regular de plans paralelo al II).
- Determinar en I la posición del vértice 14 (la arista 3-14 es paralela a I) sobre la esfera circumscrita, lo que mos permite obtener en II y III las proyecciones de dicho vértice. La vértices 11, 12, 13 y 15 re pueden obtener seguidamente en sus tres proyecciones, puesto que el pentagono que se obtiene al unir los 11 al 15 es regular y su plano paralelo a I;
 - 7º Para la obtención gráfica de las proyecciones de los vértices

 16 al 20, 31 al 25 g 26 al 30, que nos faltan para

 conseguir la depresentación de la mitad superior de este

 poliedro, tendiamos que efectuar el giro de las caras con
 tiquas alrededor de aristas ya determinadas. Estos qu
 cos presentan cierta dificultad al ser todas las aristas



7.1 Distancia de los vértices 1 al 5 (nadio "as" de la esfera inscrita a una cara pentagonal).

7.2 Distancia de les vértices 6 al 10 $\left(g_1 - \frac{t_1}{2}\right)$

centro O del poliedro):

7.3 Distancia de la vértices 11 al 15 $\left(g_2 - \frac{f_2}{2}\right)$

7.4 Distancia de les révlices 16 al 20 $\left(\frac{7}{3} - \frac{\cancel{4}^3}{\cancel{2}}\right)$

7.5 Distancia de la vértices 21 al 25 $(75 - \frac{15}{2})$

7.6 Distancia de la visition 26 al 30 (ge - 16).

21 - 1 - 73



al es rein mis paris de las estas autiliares nes faciles el trarado qua lico pero la ottorion sucresta de has proposessones de les questos de vertices 16 d 20. al 25 p 26 at 10.

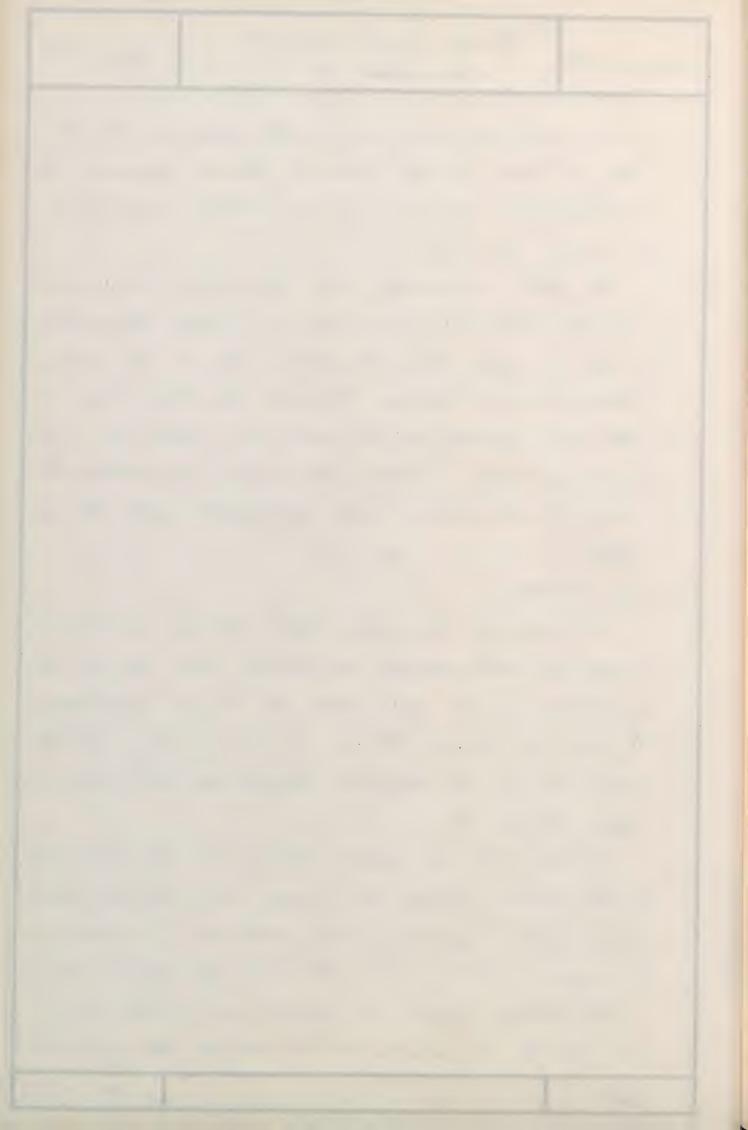
En efects, si querenes p. e. de terminer las proyección mes del vértice 18, perteneciente a la cara trianquelas 8-12-7, engan the die matices 12 y 7 have not you obtenidos ou el dibuyo. Trascor que dicha cara alrededor de la arista 12-7 hasta que el puy to 12 into some of sitions del periodores de vertices 18 al 20, el cual podemos situar previamente por la esta sur

ya calculada.

Esta operación se efectua facilmente por giro musi-No de la arista conocida del poliedro sobre dos ejes perpendiculares a I, que pasen por 12 g 7 respectivamen te, que nos permite obtener, primero en I y seguidamente en I las respectivas proyecciones del menciomado vertice 18.

Obtenida estas se pueden determinar las projecciones de los vértices cestantes del grupo 16 al 20 que forman un pentagono regular q enyo centro en I coincide con la propocción tembien en Il del centro del enque nedera Este onismo proceso se seguira en la determina.

cion de las projecciones de la vertices del grupo 21



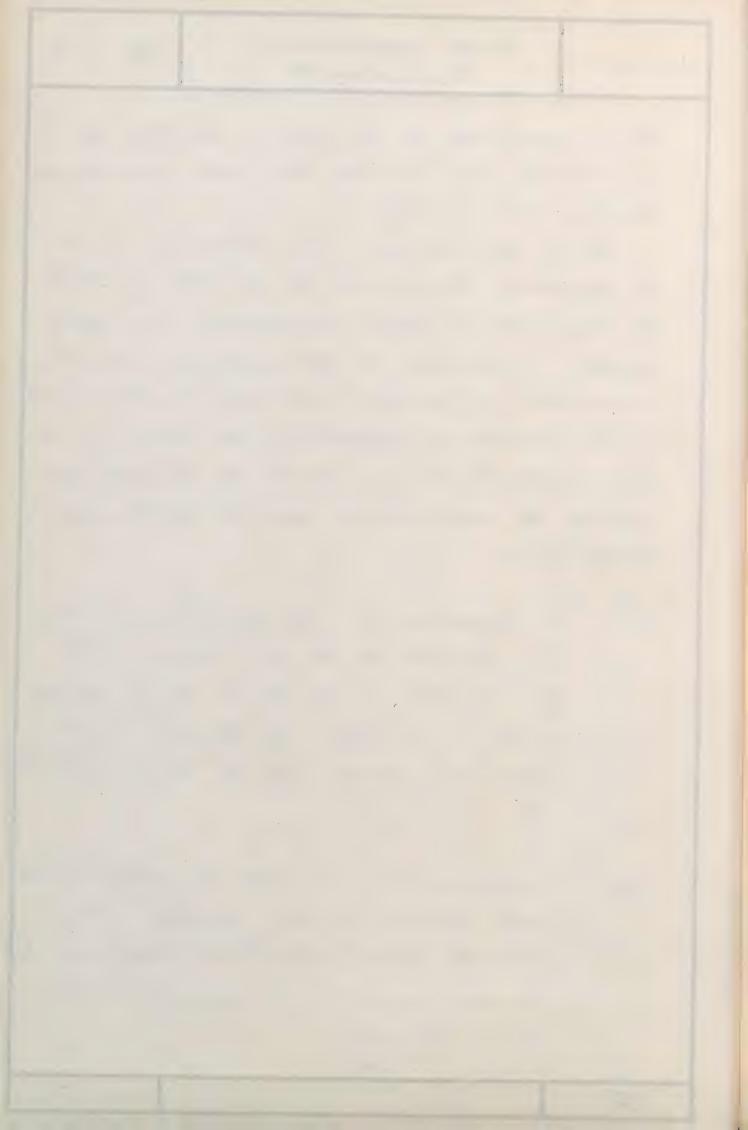
al 25 auxiliandoro de la distancia analítica "gi- 14 y finalmente para los vértices del grupo 26 al 30, mediante la cola "95 - 15".

Can los pasos anteriores, hemos obterido, en I g II, las projecciones de la mitad de los vértices (1 al 30) del arquimediano pedido, correspondientes a un parte superior: La obtención de estas proyecciones sibre III, es immediate, q se deduce de les de la plante 5 y I

Para completar la representación del poliedro en su otra mitad, tendremos en cuenta las signientes propiedades del arquim dinno, que mes servición para an rapido trazado.

Las projecciones en II, de los vértices 31 al 60, 7. 7 " son simétricas de las de los virtices 1 al 30 "(ya obtenidas) con respecto a un eje que pa-" sa por la projección of del centro, o que. "forma con el eje "6_ - O_" un ainquelo E

" Las proyecciones en I, de 60 vértices 31 al 60 7.8 " estan situadas en planos paralelos a II g a distancios iguales y similarions (qua detinidad des tambien paralelo a I que para por la proyec-" cion of del centro. Numeras los vértices.



contente complementarias que daran mayor exactitude a circle to transito da complementarias que daran mayor exactitude a circle to transito de complementarias que daran mayor exactitude a circle to transito de complementarias que daran mayor exactitude a circle to transito de complementarias que daran mayor exactitude a circle to transito de complementarias que daran mayor exactitude a circle to transito de complementarias que daran complementarias que daran complementarias que daran complementarias que daran complementarias que complementarias que daran complementarias que complementarias que daran complementarias que complementaria que complement

Altura "" es una cara triangular

$$n = \frac{\sqrt{3}}{2} l = 0,8660254...l$$

Para el caso del dibujo, sera n: 0,86 60 254x 25,5 : 20,1 "

Distancia "9," de los vértices 6 el 10 al plano de la cara pentagonal 1 el 5, y de los 5/ el 55 a la cara pentagonal 56 al 60.

le détiene projectands la altura "n' sobre el plano III; el angulo de projeccion es de

 $\varphi_{3-5} - 90^{\circ} = 153^{\circ} 55' 47, 4'' - 90^{\circ} = 62^{\circ} 55' 47, 4''$

 $g_1 = n \times co 62^{\circ} 55' 47, 4" = \frac{\sqrt{3}}{2} \times co 62^{\circ} 55' 47, 4" \times \ell =$

Desarrollo del calculo auterior:



 $\frac{1}{2} lg 3 = \frac{1}{2} \times 0.477 /2 /3 = 0.232 56 07$ + lg . cm 62° 55' 47, 4" = 7.652 08 90 - lg . 2 = 0.301 03 00 - lg . 0.39 41. 12 00 - 7.595 61 97

Chan el caso del dibujo, aera: 9, = 0,39 41 12 00. x 25,5 = 10,0 mm

Distancia "fi" entre los dos planos paralelos a II, que contienen los vistices 6 al 10 g 51 al 55 empedivamento.

Le votiene por diferencias de alturas "C5" 2 "g1", ya

 $|f_4| = 2(C_5 - g_4) = 2 \times (1,98090826 - 0,39411200) \times l =$ = 3.17359252... l

Para el easo del dibujo, rerà: f. = 3, 17 35 93 x 25,5 = 80,9 mm

Postio "I," de la circumercucia circumsorità al pen-Fazono regular de vistiers 6 al 10 y 51 al 55. "(since nota a la vuelta)

Esta representado en su verdadera magnitud, en el plano II, por el segmento 6-0, suma del 6-B y del 8-0.

* NOTA

Este radio puede obtenerse directamente, en función de la distancia a que se encuentra el plano de la cana, del centro del potiedro (supuesta conocida), ya que en este caso dicho radio es el mismo que el de la cirandrewed que se obtendois al sercioner la cofera inconserved for al places de la cara, puesto que la ventires 6 al 10 g 51 d 55 pertenecen a la esfera circumerita del policiale.

Circ. sección

 $AB = \Gamma_1 = \sqrt{a^2 - x^2} \qquad (1)$

a : radio de la enfera circum crita al arqui mediano.

nos ocupa in ha endo Eur el easo particular que $2 \qquad 3c = \frac{1}{2} = \frac{3.17 \ 35 \ 92 \ 52}{2} \ell$ a = 2, 15 58 30 31 ... L = 1,58 67 96 26

 $\Gamma_1 = \sqrt{(2, 15 58 30 31)^2 - (1.5867 96 26)^2} \times \ell =$

= \ \ 4. 64 76 04 32 55 14 69 61 - 2, 51 79 22 37 07 49 88 76 . 1 =.

Nalor coincidente con el calculado anteriormente.

They = 21

 $6-8 = n \cdot con 65° 55' 17.4"$ | ver réleule de g_1] $8-0 = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{30}} \, \ell$ (noté de la circumparencie inverté de pentagnes regulas de sura casa, de lado ℓ ")

 $\boxed{I_7} = n , \text{ acc. } 62^{\circ} 55' \text{ at. } 4'' + \sqrt{\frac{5 \cdot 2\sqrt{5}}{20}} \ell = \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot 264 \cdot 62^{\circ} 55' \cdot 4\% A'' + \sqrt{\frac{5 \cdot 2\sqrt{5}}{20}} \right)$

= 1.45 93 43 1 ... {

Desarrollo del calculo auterior:

 $\frac{1}{2} l_{9} 3 = \frac{1}{2} * 0, 477 12 13 = 0,238 56 07$ = 7,949 60 94 0,188 17 01 = -0.301 03 00 $l_{9} 0,77 11 52 14 = 7,887 14 01$

Para il izio del delayo, cera: Fq = 1. 45 93 43 1 × 25,5 = 37,2 m m.

Distancia "g2" de los vértices 11 al 15 al plano de la cara pentagonal pentagonal 1 al 5, 9 de los 46 al 50 a la cara pentagonal 56 al 60.

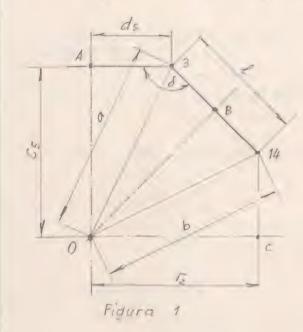
70

30 - 12 - 73



Le villence progrationale de mista 3-14- actua planes III. que que distre ariste se prochila 28 5.

Il angulo & de propocuer se determina de la signicale



me Feel Fe

di printer en el samo diametral qui sain por la arista

3-14 y el centro O del cuismo.

Sido par porre a su ver por
el centro A de la sara ponto mel

1 al 5. Unano. A, 3, B (punto
medio de 3-10) g 14, con el centro O. El angulo S es el for-

mades por la varieta 3-14 con el plano de la cara pen-

Le la figure a diduce que

$$(4-3-0) = \frac{d_5}{a} = \frac{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \ell}{2\sqrt{\ell^2 - m^2}} = \frac{0,85 \ 06 \ 50 \ 8}{2,15 \ 58 \ 30 \ 3} = 0.39 \ 45 \ 81 \ 5...$$

$$< A - 3 - 0 = 66^{\circ} 45' 36.4''$$

Pesarrollo del calculo anterior:

by 0, 39 45 81 5 = 7,596 13 67 =

\$ 1-3-0 = 66° 45' 36.4"



I por the feete

$$u_{2}(0-3-8) = \frac{l:2}{2} = \frac{l}{2a} = \frac{l}$$

Besarrollo del catanto auterior:

by 40 (0-3-B) = by 0.23 17 29 20 = 7,365 35 54

4 (0-3-B) = 76° 35' 21,6" -

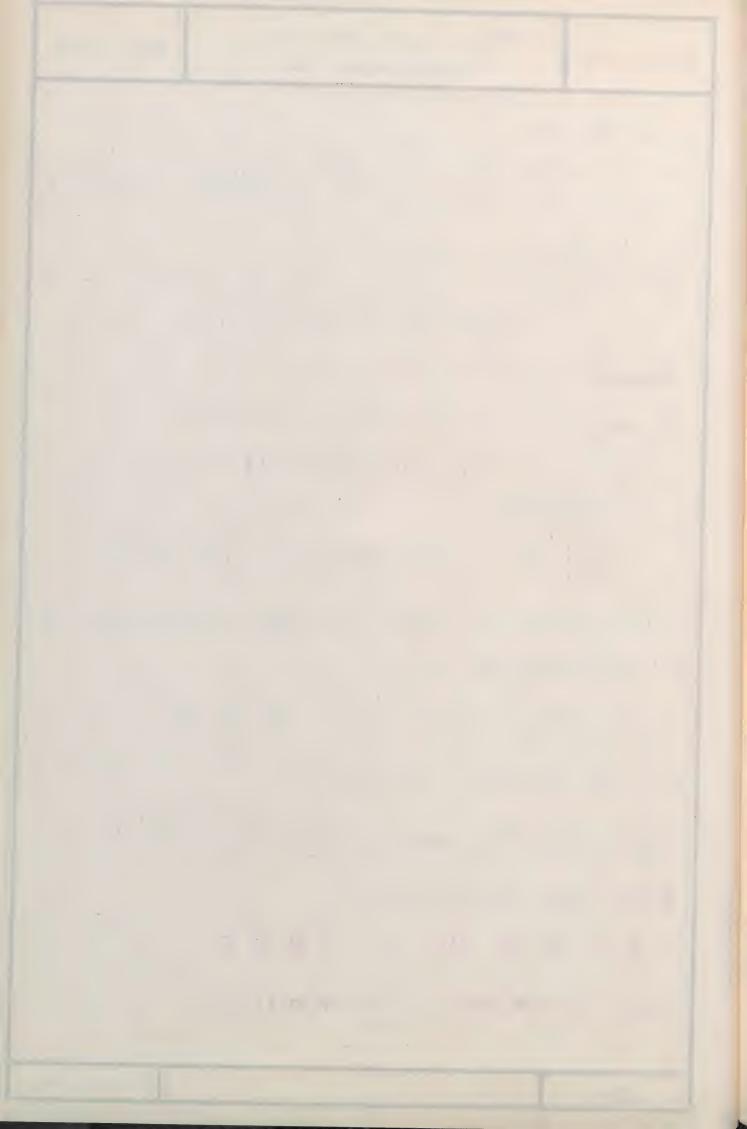
y por cousiquemente

di propretames la arista :- la sebre el plano III, el an-

in to sur bendmente tendremos:

des avrollo del calculo auterior:

UNE A4 210 X 297



The of case partitules that delege read:

92 = 0,59 69 33 01 - 25.5 = 15.2 mm.

distancies "fo" entre la rela planes paralela a II que contienen la vértices 11 al 15 y 46 n 50 conpoctivamente.

La Mission por diferencias de alturas "C," ; "q", ya calculadas.

 $|f_2| = 2 (c_5 - 9_2) = 2 \times (1,78 89 08 36 - 5,59 69 23 01) l =$ = 2.76795050 l

Para el 100 de mais 2000: f2 = 2.76 39 50 50 x 25.5 = 30.6 mm.

Radio "12" de la circunferencia circumscrita el pentagono.

acquelar de vérdices 11 al 15 y 26 2 50 mila de morta de mor

 $\boxed{f_2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{f_2}{2}\right)^2} = \sqrt{(2, 15 \ 58 \ 30 \ 31)^2 - \left(\frac{1}{2} \times 2, 76 \ 79 \ 50 \ 50\right)^2} \times f$

= \((8, 15 58 30 31)^2 - (4, 38 39 75 25)^2 x l =

= V 4, 64 76 04 32 55 14 69 61 - 1.91 53 87 49 26 12 56 26 × l

= \ 2, 73 &2 16 83 29 02 13 36 = \ = 1, 65 29 41 87 \ \ \

3

21-1- 73

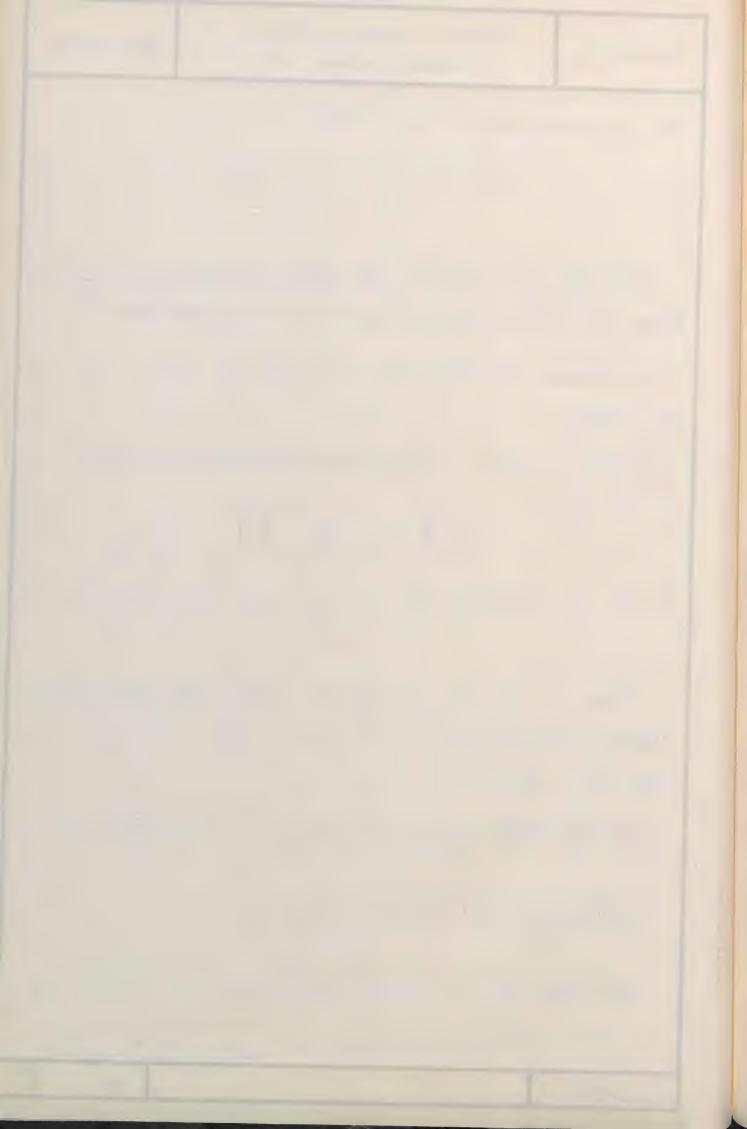


Fig. 1. 11 1. 18 1. 18 1. 18 2. 18 1. 18 29 41 89 x 25.5 = 42.1 mm.

Quede compositiones et valor 10 de est radio, properties.
do et continues A.3.14 (fig. 1) retre et eje OC.

Lu valor se Mondre : [] = do - 2 from 8 - 904 =

= V 5 + 15 l + ru (142° 20' 58" - 70" | 1 = [V 5 + 15 + ru 53° 20' 58"] - 1

= (0,85 06 50 8 + 0,80 23 91 1) 2 = 1.65 29 41 9... 2

desarrollo del calculo auterior:

lg sen 53° 20' 58" = 7; 90 43 32 0

Antilog 7, 90 43 32 0 = 0, 80 22 91 1 ...

valor coincidente con el obtenido auteriormente.

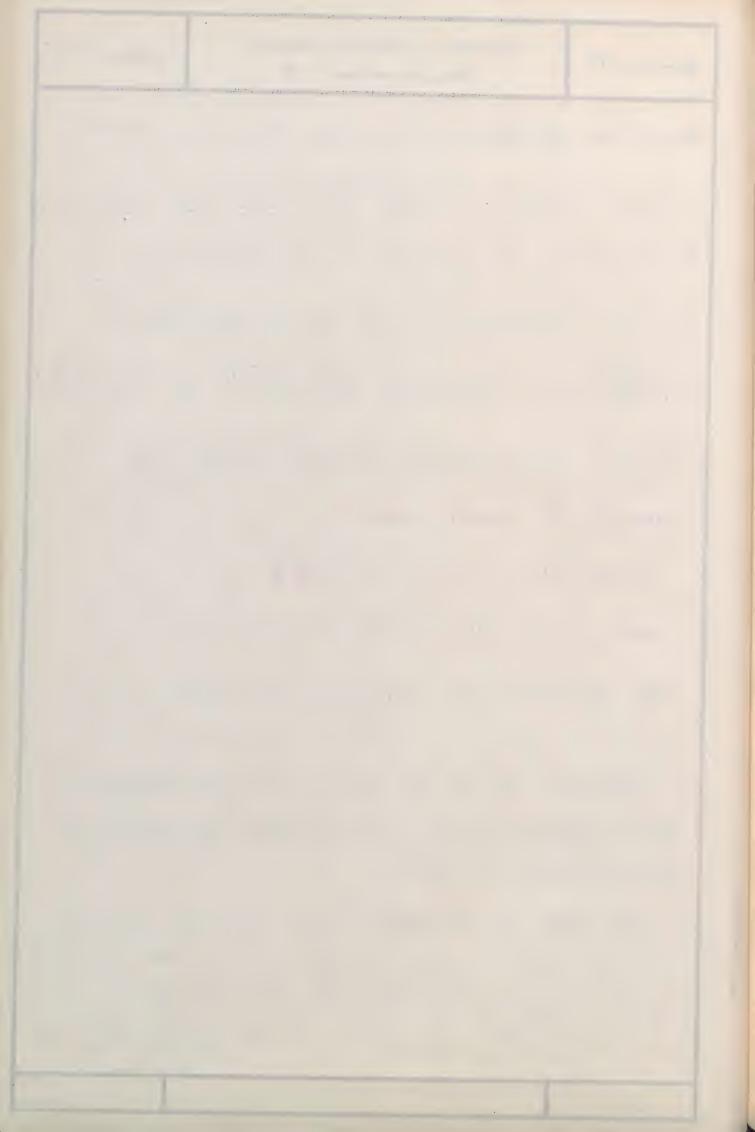
Distancia "g3" de los vértices 16 al 20 al plano de la cara pentagonal 1 al 5. g de los vértices 21 al 25 a la cara pentagonal 56 al 60.

El ca'lculo de la situación de los gangos de mistres.

16 al 20, 21 al 25 y 26 al 30, así como la de los gangos

equidistantes del plano diametral, 31 al 35. 36 al 40 y

LI al 15. (estas 93, 94, 95 y 10, 14, 15), as Essa en



la seguireté propuedad quemétrice de este asquirentions

"una cara pentagonal, hasta an intersección con "las cinco caras también pentagonales que la resdean, es un dodecaedro cegular", neudo el centro de las "ours tentagonales del continuación con del dodecaedro.

"del dodecaedro.

De aqui ne deduce que el cadio C12 de la esfera inscrita al dodecaedro, es coincidente con el radio C5 I de la esfera tangente a las caras pentagonales del Saquimediano II. Sai pues podemos roter en
las dimensiones del dodecaedro (ver lam. 4) en función
del lado "l" del arquimediano, puesto que siendo C,2 = C5 II

se verificará que (ver form, 32. lam. 4):

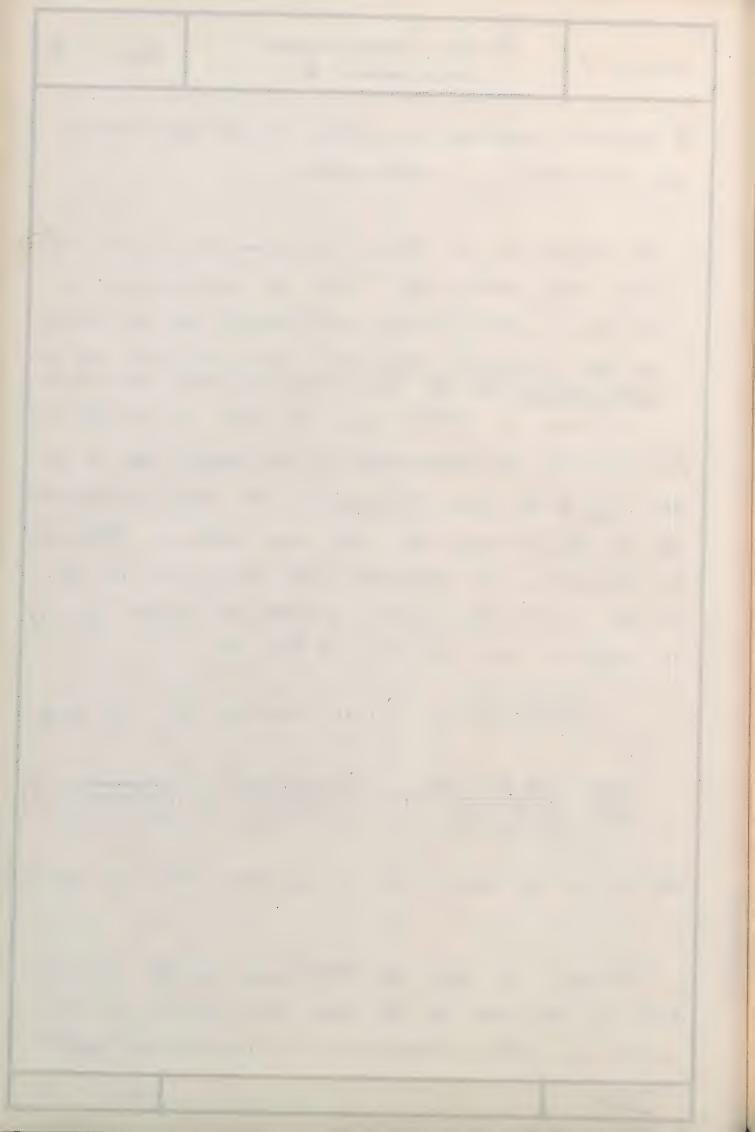
 $\sqrt{\frac{11 \sqrt{5} + 25}{40}} l_{12} = 1,98090826...l$ de donde

$$\frac{\ell_{12}}{\ell_{12}} = \frac{1,98090826}{\sqrt{40}} \ell = \frac{1,98090826}{1.1135164} \ell = 1.7789753...\ell$$

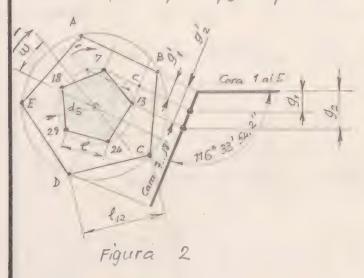
Para el caso del dilenjo serà: l₁₂ = 1.77 89 75 3 x 25,5 = 45, 4 m m.

Conocido el lado del dodecaedro, el del arquimediano, y el dudro de las caras del primero (ver torm. 34, lam. 4), podemos determinar la posición del penta-





gono del arquimediano en celación con el de la casa del dodecaedro de centro coincidente, por proyección de las al turas "9," 1 "92" ya determinadas.



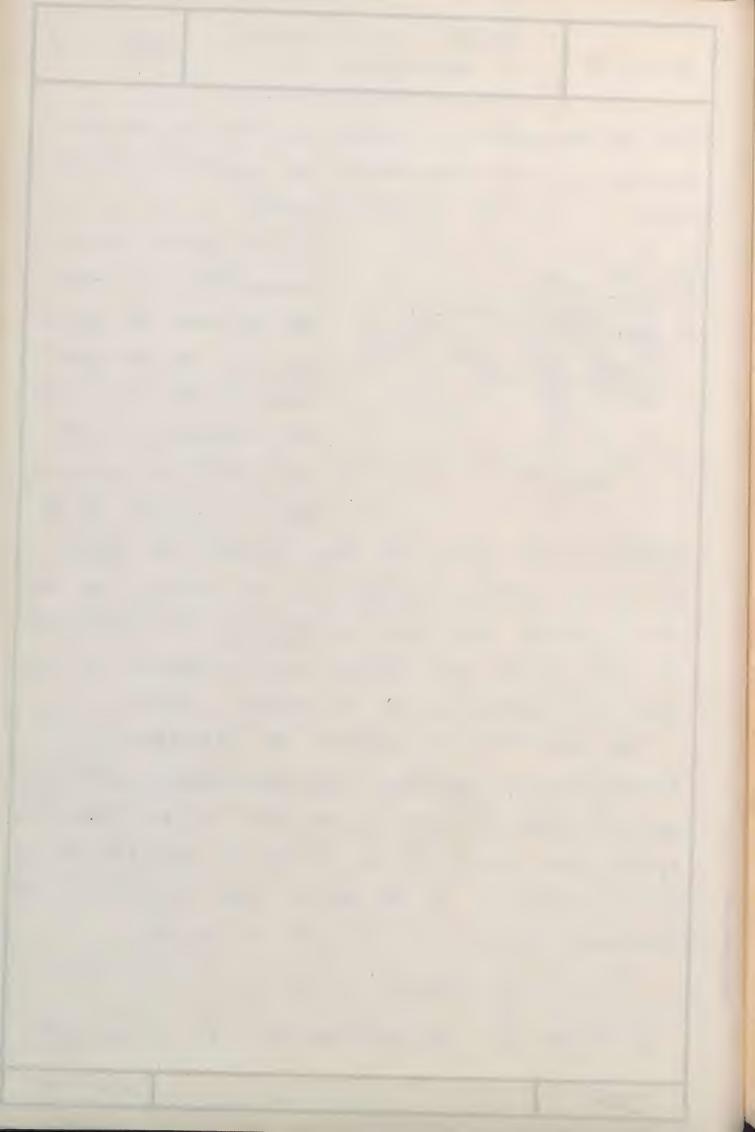
representado, a la derecha, el diedro que forman
dos caras del dodecaedro,
siendo el plano de la supeaior coincidente con el de la
cara la 15 del as quimediano; la figura de la

de la cara oblicua, contigna a la auterior, que contiene, girada, una cara pentagonal del arquimedrono dado, siendo esta siltima una cualquiera de las cinco que rodean a la de vértices 1 al 5.

Jea A-B-C-D-E el pentagono del dodecaedro, j 7-13-24-29-18 el pentagono del arquimediano contemido en el anterioz. El angulo de giro "w" one habita un apticar para parar de una posición de ladi-paraleles en los do pentagonos, a la posición acal, se deduce del triángulo acetángulo 7-C-13 en el que

X C-7-13 = W

In hipotermusa 7-13 er ignal a "l", g su cateto



c-13. es

siende 9, 9 9, " las prospecciones respectivas de 9."

y "9." de las alteras que calculadas. Por consigniente, tendremos

$$g_2' - g_1' = \frac{g_2 - g_1}{\cos \left(116^\circ 33' 54.2'' - 90^\circ\right)} = \frac{0.59 69 33 01 - 0.39 41 12 00}{\cos \left(26^\circ 33' 54.2''\right)} \times \ell$$

$$= \frac{0.20 \ 28 \ 21 \ 01}{0.89 \ 44 \ 27 \ 14}, \ 1 = 0.22 \ 67 \ 60 \ 80 \dots 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g_2' = 0.66 \ 73 \ 91 \ 4 \\ \\ g_1' = 0.44 \ 06 \ 30 \ 6 \end{array} \right\}$$

y final mute

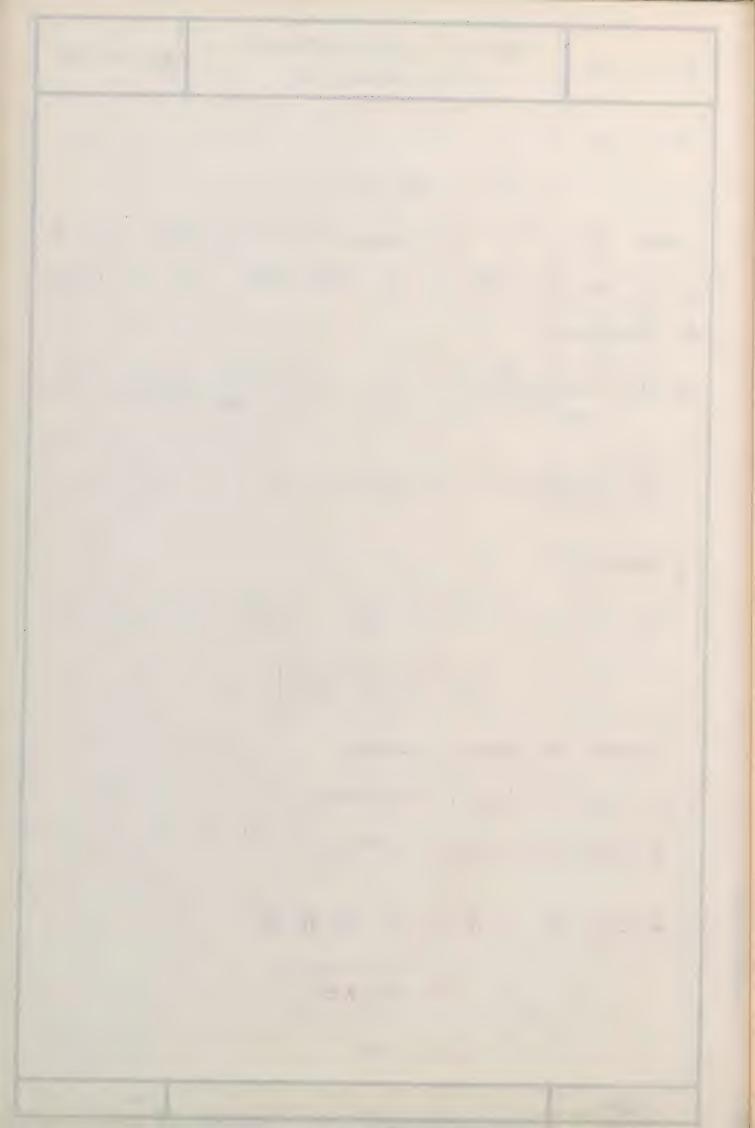
sen
$$W = sen \left(C - 7 - 13\right) = \frac{C - 13}{7 - 13} = \frac{g_2' - g_3'}{\ell} = 0.22676080...$$

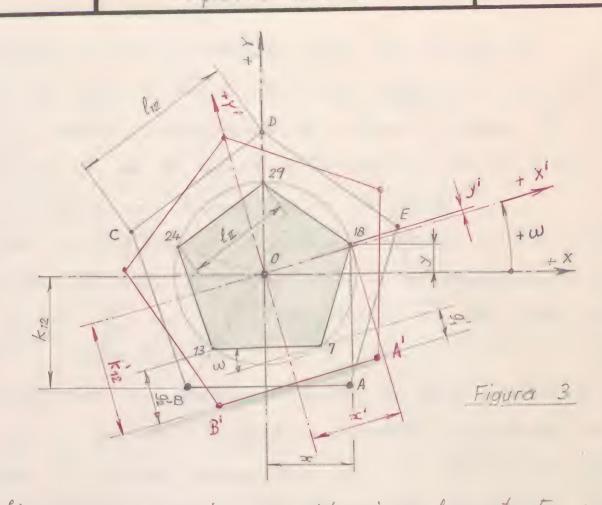
Desarrollo del cálculo auterior:

4. 5 (26° 33' 54,2") = 7, 95 15 45 0

Antilog 7, 95 15 45 0 = 0, 89 44 27 14

ly ren W: ly 0,22 67 60 80 = 7, 355 56 79



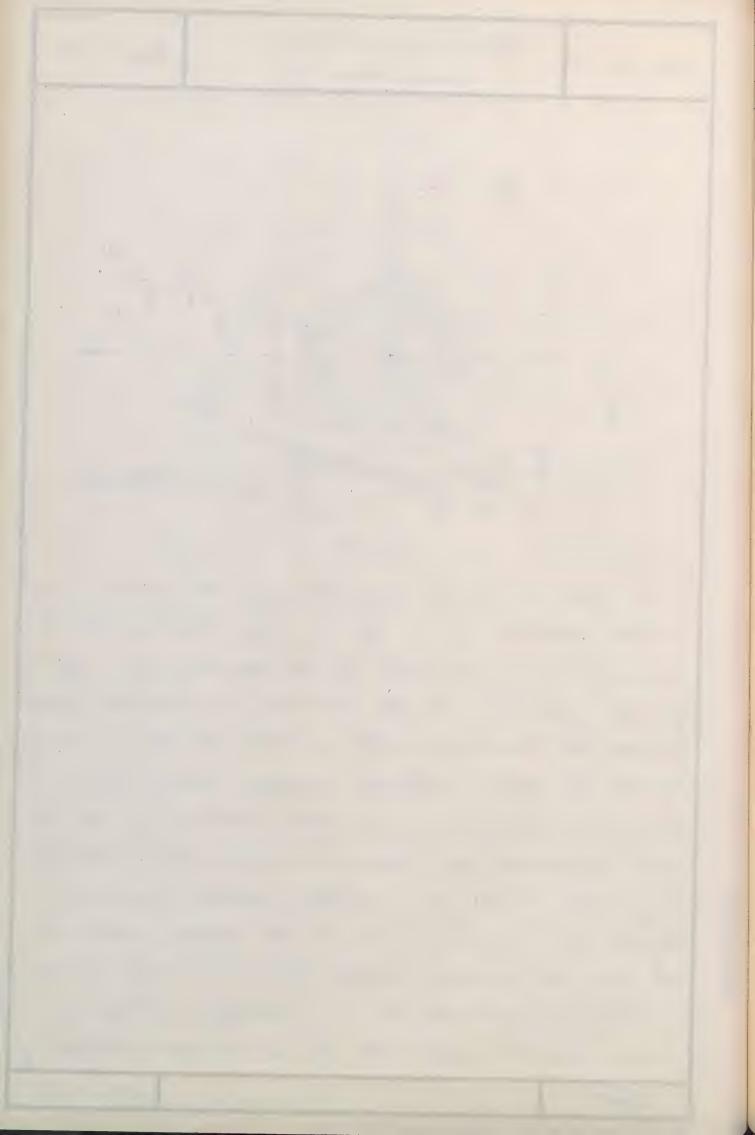


el proceso a seguir para determinar las cestantes magcritudes analíticas "g", "g" g "gs", cequiere obtener
previamente las proyecciones de las crismas "g", "g"

g "g" sobre la cara del dodecaedro que contiene la pentaganal del dequimediano II g ambas de cento "0" comin
bos lados de ambes pentagones esculares forman entre si
el ángulo constante "w" ya determinado, por lo mal podemos consideras que, supominado proviamente el pentagomo interior colocado con sus lados paralelos al exterior,
llegariamos a la posición final del primero mediante
el giro del mismo abrededor del centro comuna o, de
un ángulo de amplitud "a" (tambien se elega al
mismo ressultado supomendo fojo el polísemo enterior que

E

27-1-75



girande el escterior alrededor de O, el augulo "w").

bu la liquia 3 hemos planteado gráficamente el problema a resolver, conservando la misma votación de vértices que la de la figura 2: (el conjunto de la figura 3 esta invertido con respecto al de la fig. 2).

Lea (fig. 3) A.B.C.D.E el pentagono regular de la cara del dodecaedro de lado "li"; 7-13-24-29-18 el del arquimediano dado de lado "li", en su posición inécial un sus lados paralelos 9 centro O común.

Consideremos un sistema cartesiano de eje x paralelo al lado B.A. Il centro D. El problema analitico consiste en en
contrar las muevas coordenadas "x'" e "y'" de los vértices 7, 13, 24, 29, 18 en función de las primitivas "x"
e "y", cuando los ejes, juntamente con el pentagono exterior A.B.C.D.E, giran alrededor del origen D, el angulo"W.

Las formulas de transformación son:

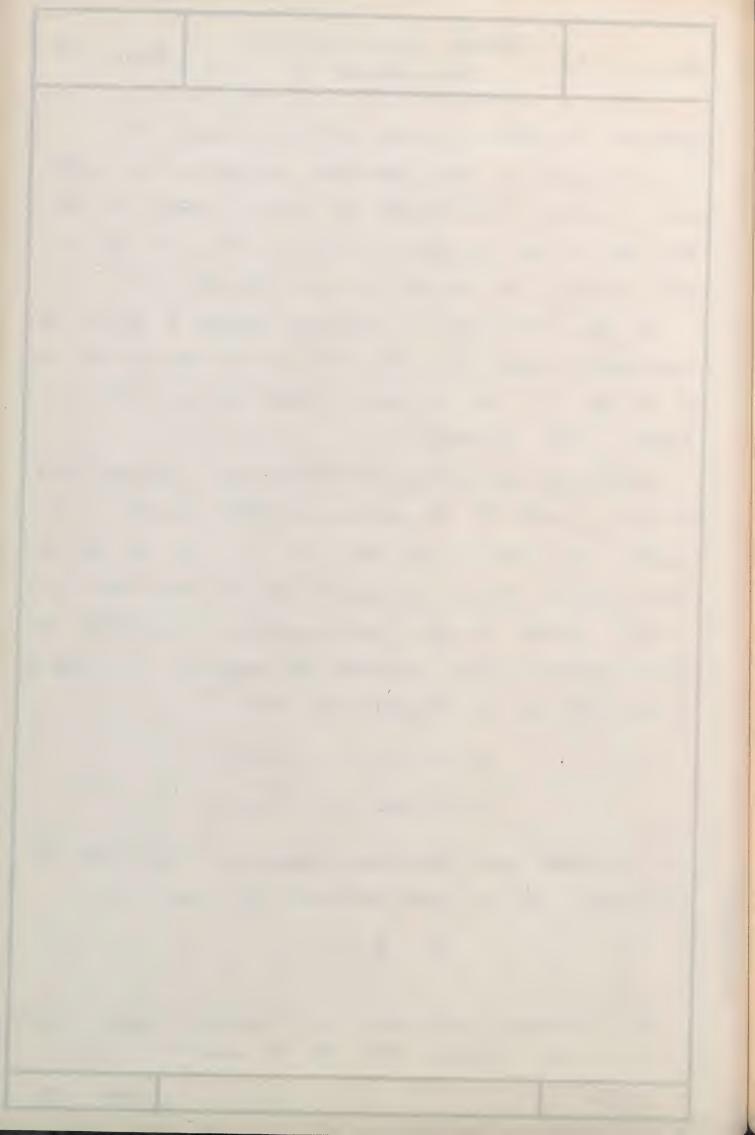
$$x' = x \cos \omega + y \sin \omega$$

 $y' = -x \sin \omega + y \cos \omega$ } (1)

de las cuales solo mecesitamos aplicar la sequenda: - l'onociendo "y", se puede calcular "g', pr

$$g' = k'_{12} + y' \tag{2}$$

Miare "Eratade de Materialisticas" par D. Scerffing; Editorial queti-



UNE 44 210 X 297

Comencemes per cricular kno = k'o (ver lig. 3). is la apotema de la rara pentagenni de lado "la"; ou valor nera pues (ver lan. 4, fi ou. 39)

 $\begin{bmatrix} k_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} & \ell_{12} = 0.6881910... & \ell_{12} = 0.6881910... & 1.7789753... & \ell = \\ = 1.2242748... & \ell \end{bmatrix}$

Continueuros calculando las coordenadas "x" e "4" de los vértices del pentagono interior de lado "l"

 $\begin{cases} x_{13} = -\frac{1}{2} \ell = 0,500000...\ell \end{cases}$

 $y_{13} = -\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} \ell = -0.6881910...\ell$

(x_B = + l neu 54° = = + 0.80 90 16 9...l

 $\begin{cases} y_{18} = + d_{\ell} - \ell \cos 54^{\circ} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} \ell - \cos 54^{\circ} \ell = + 0.26 28 65 5... \ell \end{cases}$

(x₂₄ = - l sen 54° = ____ = - 0,80 90 16 9... l

 $\begin{cases} y_{24} = y_{18} = \\ y_$

(x₁₀ = ± 0 = = ± 0

 $29 \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 29 \end{array} \right. = + d_{\ell} = + \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} \ell = + 0.85 \ 06 \ 50 \ 2... \ell$



En la calcula anteriores intervienen la valores.

a)
$$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} = 0.6881910...$$

b)
$$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} = 0.8506508...$$

Fin apieur las formulas 11 g 2) tabularios la vilculos respectivos a continuación:

TABLA I			
X	У	- x sen w = = -0.22 67 60 8 x	
+ 0.50 00 00 0-2	-0.68 81 91 0 l	- 0. 11 33 80 42	
- 0.50 00 00 0	-0.68 81 91 0 8	+ 0.11 33 80 4 l	
- 0.80 90 16 9 2	+ 0,26 28 65 5	+ 0, 18 34 53 3 {	
± 0	+ 0, 85 06 50 8 {	± 0,00 00 00 0 - £	
+ 0.80 90 16 92	+ 0,26 28 65 5 {	-0,18 34 53 3 8	
	2 0.50 00 00 0- l 0.50 00 00 0- l 0.80 90 16 9 l	2 y 2 0.50 00 00 0-l -0.68 81 91 0-l 0.50 00 00 0-l -0.68 81 91 0-l 0.80 90 16 9-l + 0.26 28 65 5-l	

Vértice	+ y cos w = = 0.97 39 50 2 y /	y'= - x sen w + + y cos w	9'= k'+ y' = = 1.22 42 74 8. l+ y'
7	- 0.67 02 63 8l	-0,78 36 44 2····· l	+ 0,44 66 306
13	- 0.67 02 63 8 1	- 0,55 68 83 4 8	+ 0.66 73 91 4 l
24	+ 0.25 60 179	+ 0.43 94 71 2 6	+ 1.66 37 460 (
29	+ 0,82 84 97 5 €	+ 0.82 84 91 5 {	+ 2,05 32 66 3 (
18	+ 0,25 60 17 96	+ 0,07 25 64 6 {	+ 1.29 68 39 4(

E.C.



Pouro puede observanse, los valores de "9; "9 "9; "

Obtenidos en la tabla, correspondientes a los cristices i p

13, des pues del año en ser consciente, como dese enceder, con los iniciales que estado es interes de

determinación del amondo de que; esto me, cirve de

comprobación del cálculo reolise de.

Como resultado del cálculo anterior, se son similar las distancias "gi" a "gi" de los vértices de una cara pentagonal del arquimediano al lado del dodecae-dro regular de caras coincidentes con las anteriores (de ignal esfera corcumocrita), distancias medidas estre dicha cara. Sus valores son los signientes:

$$g'_1 = 0$$
, 44 06 30 6... ℓ (wirting 7)

 $g'_2 = 0$, 66 37 46 0... ℓ (" 13)

 $g'_3 = 1$, 29 68 39 4... ℓ (" 18)

 $g'_4 = 1$, 66 37 46 0... ℓ (" 24)

 $g'_5 = 2$, 05 27 66 3... ℓ (" 29)

plano III. El ainquelo de proyección sura vertir. 2)

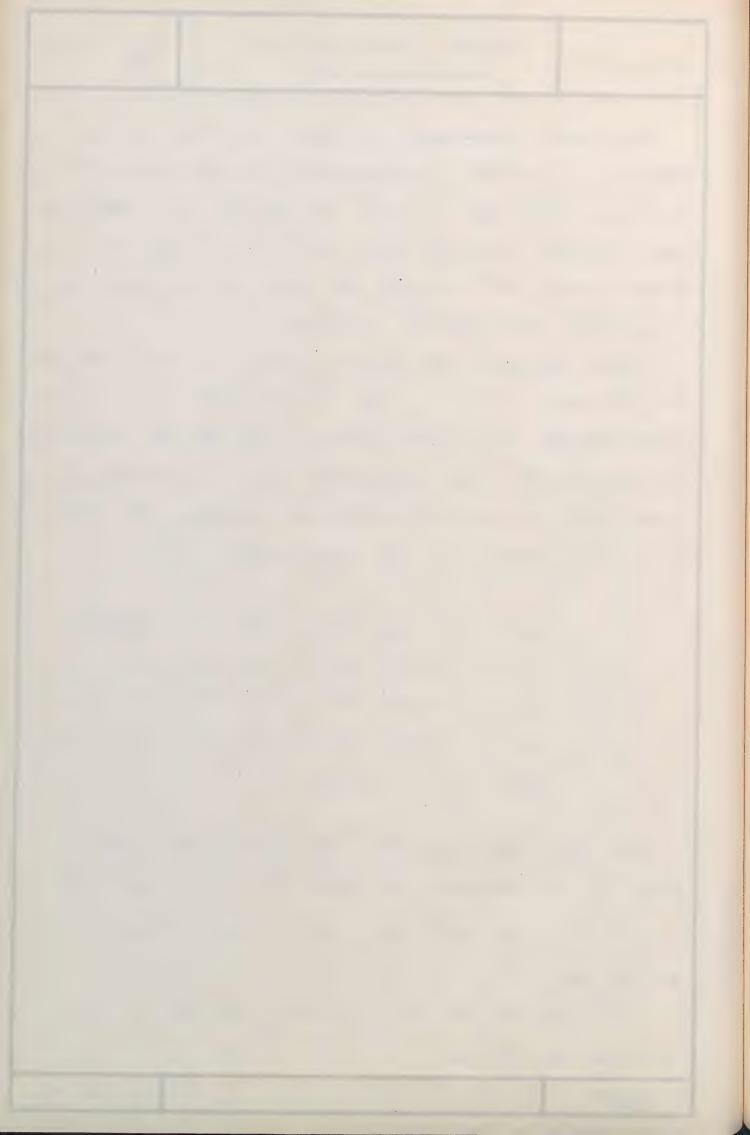
116° 33' 54,2" - 90° = 26° 33' 54,2"

en et que

cos 26° 33′ 54,2" = 0,89 44 27 14.

de doude ne oblience





 $g_{4} = 0,44,06$ 30 6. \times 6, 89 44 27 14... $\ell = 0.39$ 41 13 0 ... ℓ $g_{2} = 0.66$ 73 91 4 \times " ... $\ell = 0.59$ 69 33 0 ... ℓ $g_{3} = 1.29$ C7 39 4 ... \times " ... $\ell = 1.15$ 99 38 4 ... ℓ $g_{4} = 1.76$ 37 46 11 ... \times " ... $\ell = 1.48$ 80 99 6 ... ℓ $g_{5} = 2.05$ 27 66 3 ... \times " ... $\ell = 1.23$ 60 19 9 ... ℓ

93 = 1, 15 99 28 4 1

Para el caso del dibujo aria: 93 = 1, 15 99 28 4 × 25,5 = 29.6 mm

Distancia "f3" entre la da plante paralelo a II qui contienen les vértices 16 d 20 g 41 al 45 respectivaments.

Le obtiene por diferencias de alturas "C5" 2 ".93", ya calculadas.

 $f_3 = 2(c_E - g_2) = 2 \times (1.98 09 08 3 - 1,15 99 28 4) l = 1.64 19 59 8 - ... l$

Para el caso del dibujo será: f3 = 1.64 19 59 8 - x 25,5 = 41.9 mm

Radio " r_3 " de la concernéencia cincumscrita al pentagon. o cognitar de vértices 16 el 20 g 41 al 45 respectivamente (ver esta al aeverso de la país. 20) $[r_3] = \sqrt{a^2 - \left(\frac{f_3}{2}\right)^2} = \sqrt{(2.15583031)^2 - \left(\frac{1}{2} \times 1.64195980\right)^2} \times l =$

(3)



= V 4. 64 76 04 32 55 14 69 C1 - 0.67 40 07 99 62 04 01 , 1 =

Tara el caso del diberso cerà: 13 = 1,79 33 18 2. ~ 35. 5 = 50, 8 m n.

pentagonal 1 al 5, q de la vertices 31 al 25 al plans de la cara pentaqual 56 al 60. (ver final calculo "g3")

g, = 1, 48 80 99 6--- l

Para el caso del dibujo, será: 9 = 1,48 80 99 6. x 25,5 = 37,9 mm

Distancia "f4" entre la planos paralelos a II que contiemen los vértices 21 al 25 y 36 al 40, respecti samente.

le obtieve por diferencias de alturas "C5" 2 "94", ya calculadas.

f4 = 2 (C5 - 94) = 22 (1,98 09 08 3 - 1,48 20 99 6) 1 = 0,98 56 17 4... 6

Para el caro del dibujo, cera: f4 = 0.98 56 17 4 -- x 25,5 = 25,7 mm



Padio "T4" de la necum neuces circumente ai pentagana acquilar à vérties 21 al 35 y 35 ai 40 acspectitamente.

 $=\sqrt{(2.15\ 58\ 30\ 31)^2-(0.49\ 28\ 08\ 70)^2}$ = ℓ =

= \ \ 4, 64 76 04 32 55 14 69 61 - 0. 24 28 60 41 47 95 69 00 x 1 =

= V 4, 40 47 43 91 07 19 00 67 × l = 2.09 87 48 2 --- l

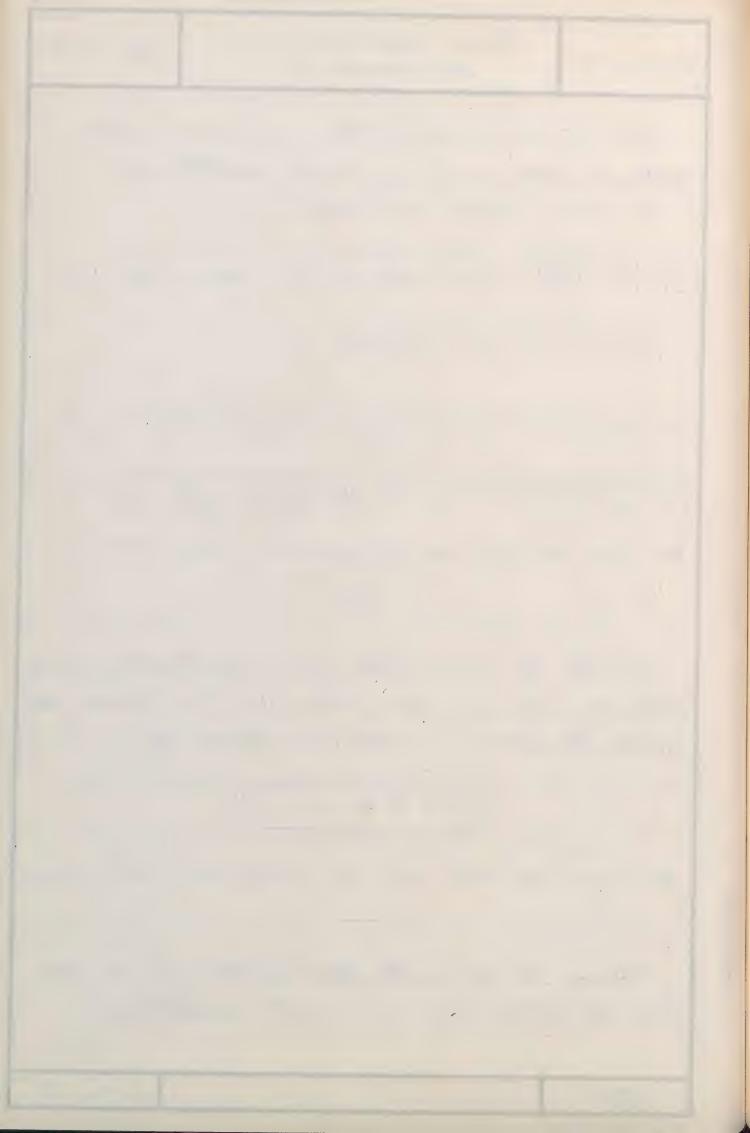
Para el caso del diberjo, cerà: 14 = 2,09 87 68 2 ... × 25,5 = 53,5 m m

Distancia "g" de la virtices 26 al 30 al plano de la cara pentagonal 1 al 5, q de la réstices 31 al 35 a la cara pentagonal 56 al 60. (ver final calente "g3")

9₅ = 1, 83 60 49 9.... L

Para el caso del diberjo, será: 9 = 1,83 60 69 9- × 25.5 = 46.8 mm

Distancia "fs" entre los dos planos paralelos a I que contienen los relices 26 al 30 y 31 al 35, reespeciente.



Ladas.

5= 2 (c, -g) = 2 + (1. 98 09 08 = -1, 83 60 49 9) = 0.28 97 16 8 &

Para el caso del dibujo, rerà: f5 = 0, 28 97 16 8. - x 25,5 = 7,4 mm

Padro "5" de la circumferencia circumscrita al pentagono requier de ventices 26 al 30 g 31 al 35 respectivamente. (ver rota al severes de la pag. 20)

 $\sqrt{f_5} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{f_5}{2}\right)^2} = \sqrt{(2.15582031)^2 - \left(\frac{1}{2} \times 0.38971680\right)^2} \times \ell = \sqrt{(2.15582031)^2 - \left(\frac{1}{2} \times 0.38971680\right)^2}$

 $= \sqrt{(2..15 \ 58 \ 30 \ 31)^2 - (0.14 \ 48 \ 58 \ 40)^2} + \ell =$

= V 4, 64 76 04 32 55 14 69 61 - 0, 02 09 83 95 60 50 56 00 2 l=

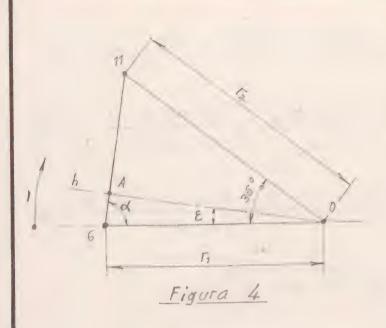
= \ 4,62 66 20 36 94 64 13 61 x l = 2, 15 09 58 0 -... \ \

Para el caro del dibujo, será: 15 = 2, 15 09 580. × 25,5 = 54,9 mm

Angulo "E" que forma el eje de simetria "h", en la pro-

Refiziendonos a la proyección I (lam. 31), el triangu-





11-0-6 (£5. i., tiene bi.

value ve calculades $6-0 = \Gamma_1$, $11-0 = \Gamma_2$ g.

el angulo que la manu

esta ladi es de $\frac{360}{5}$: 2 = $\frac{360}{5}$.

ta altura or de este trianquelo, correspondiente a 0, es el eje "h" de

simetria de las proyecciones en II de los vértices del arquimediano; este eje forma un angulo "E" (megativo) con el lado 0-6.

En la resolución trigorio mitrica de triamentos oblicurarquelos, cuando se como cen dos lados q el ánquelo comprendido, se obtiene otro de sus ánquelos por la formula

to d = a corr

que aplicada al caso particular de la figura 4, hacien de $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{4}$ $\gamma = 36^{\circ}$ $\gamma = 36^{\circ}$ $\gamma = 36^{\circ}$

g siendo

Len Y = sen 36° = 0,58 77 85 3 ...

cis y = us 36° = 0, 80 90 16 9 ...

y que to de ctop E, tendremos:

CO

4 - 2 - 73



$$\frac{1}{7}$$
 of $\frac{1}{7}$ etc. $\frac{1}{36}$ de des de $\frac{1}{7}$

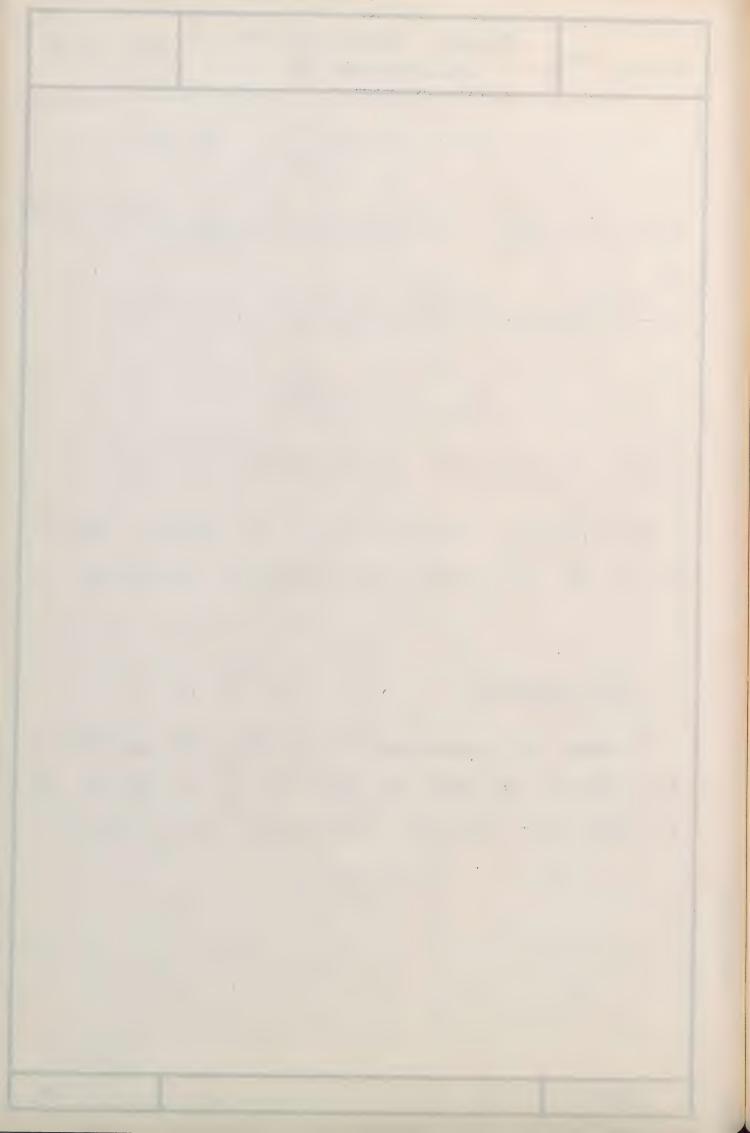
$$\frac{F}{E} = \frac{F_1 - F_2}{F_2} = \frac{36^{\circ}}{1.45 + 93 + 3} = \frac{1.45 + 93 + 43 + 1 - 1 - 1.65 + 29 + 41 + 9 \times 0.58 + 73 + 85 + 3... \times 1}{1.65 + 29 + 41 + 9 \times 0.58 + 73 + 85 + 3... \times 1}$$

4 5 8 = 7, 09 91 86 7 = 6 0.12 56 57 0

de de las magnitudes complementarias calculadas.

FIGURA CORPÓREA

Le obtience por acoplamient de 80 trianquels equilabres que le pentagones regulares, de lado 25,5 mm de forme que en cada vértice concurran à trianquels q 1 cuadra do.



CUADRO SINÓPTICO DE LAS MAGNITUDES COMPLEMENTARIAS

Maynitud	Valor exacto	Valor areimal aproximate
n	<u>V3</u> l	0. 86 60 251
f ₁	2 (65 - 91)	3, 17 35 93 2
f_2	2 (c5 - g2)	2, 76 79 51 l
f_3	2 (95 - 98)	1. 64 19 60 &
f ₄	2 (cs - 94)	0, 98 56 17 {
f ₅	2 (C5-95)	0, 28 97 17l
91	V3 x cos 62° 55' 47,4° {	0.39 41 12 l
92	cos 53° 20' 58" (0, 59 69 33 l
93	g_3' cos 26° 33′ 54.2″	1, 15 99 28 l
94	g' ₄ cos 26° 33' 54,2"	1, 48 81 00 £
95	g's cas 26° 33' 54.2"	1, 83 60 50
T ₁	$\sqrt{a^2-\left(\frac{f_1}{2}\right)^2}$	1. 45 93 43 l
Γ2	$\sqrt{a^2-\left(\frac{f_2}{2}\right)^2}$	1. 65 29 42
<i>Г</i> ₃	$\sqrt{a^2-\left(\frac{f_3}{2}\right)^2}$	1, 99 33 88 2
Γμ	$\sqrt{a^2-\left(\frac{f_u}{2}\right)^2}$	2. 09 87 481
Γ ₅	$\sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{f_5}{2}\right)^2}$	2. 15 09 58 2
ω	$Sen W = \frac{g_2 - g_1}{\cos 26^\circ 33' 54,2''}$	sen w = 0.22 67 60 8 w = 13° 6' 23,2"
3	$\frac{1}{2} \mathcal{E} = \frac{\Gamma_7 - \Gamma_2 \cos 36^\circ}{\Gamma_2 \cos 36^\circ}$	Ig & = 0.12 56 57 0 & = 7° 9' 43.5"







ESTUDIO COMPLEMENTARIO AL CÁLCULO DEL

RADIO "m" DE LA CIRCUNFERENCIA CIRCUNS
CRITA AL POLÍGONO OBTENIDO AL UNIR LOS EX
TREMOS DE LAS ARISTAS DE UN ANGULO 30
LIDO DE UN POLIEDRO ARQUIMEDIANO. - - -

one diano I g II, y exclusivamente en estos, se presenta el problema geometrico p analítico de la determinación de dida magnetad, en el que el polígono que se forma al unir los esetremos de las aristas de un angulo sólido, es un pentagono irregular (plano), de cuatro lado iguale: g un sento
designal, onayor que los anteriores.

Enfocado desde el punto de vista geométrico, el problema planteado puede enunciarse de la forma sigriente;

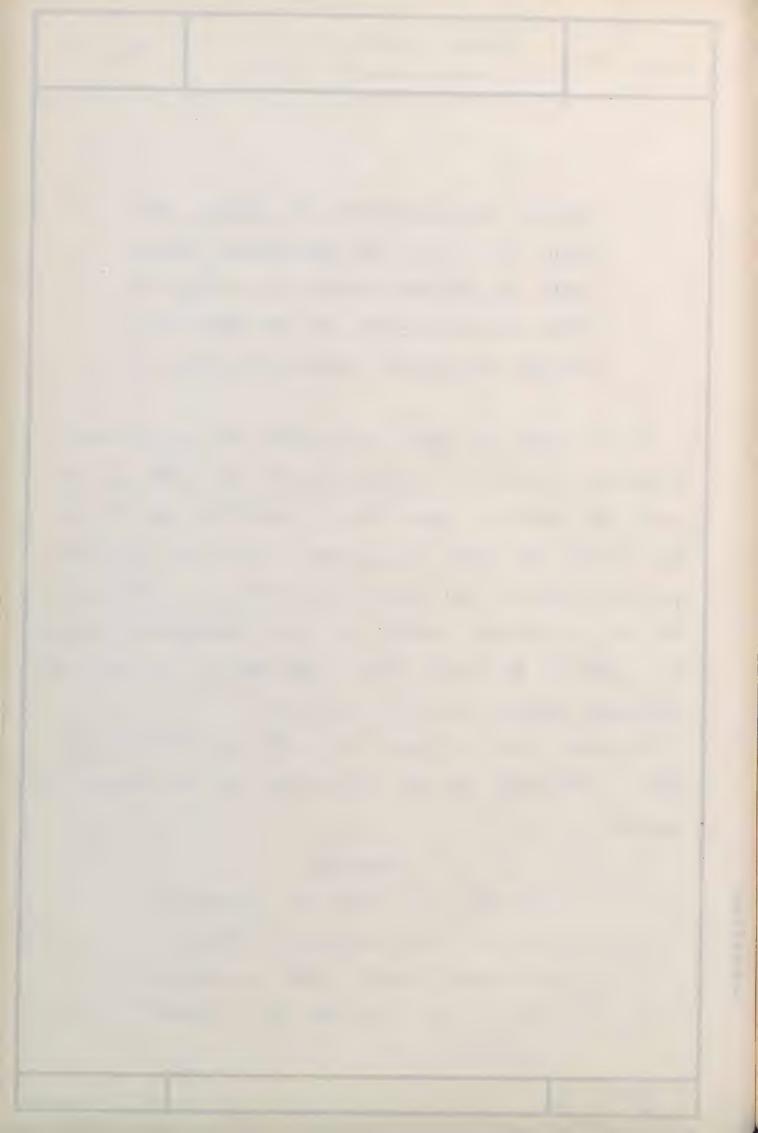
PROBLEMA

"Inscribir un pentagono irregular"

"en una circumferencia, terrien
"do aque'l cuatro lados ignales"

(l), g uno designal (a), siendo",

"a>l.



Van one el publime asa prille el precios demostore: L'existe algres d'ente entre la volación de "a" g "l" en el rue el postlana que tença arturia

L'existe, as a un, mo desta relación entre "a" y "l", en que el produ construir un pentagono de las condiciones del evenciado, 2 que esté a me ves "inscrits en una circumfrancia

En efecto, y con respecto al punto 1º, construyamos (fig. 1) un pentagono irregular A-B-C-D-E, con las

condiciones del emencia do, es decir, en el que se verifique que BC = CD = DE = EA = l 2 AB = a; ciendo a>l, el cual podrà obtenerse siem pre o cuando se terra que

BC+CD+DE+EA > AB,

o ser que 4l > a, o en equivalente

 $\frac{a}{\rho} < h$

para valores de a = 4, el problème me diene selucion germetrica. Por el controrio, para valeres de

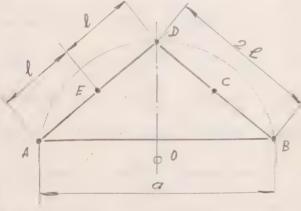


0 2 = 2 4, el problema tiene siempre robucion. Est per indice que l' preste variar entre les valores

$$\frac{a}{4} < l < \infty \tag{3}$$

Vanos a demostrar requidamente la propiedad de que un pentagono ivregular de las condiciones del enunciado, en el que se verifique la condicion (2), es inscriptible en ma circumferencia (punto 2°).

Tara ello supengamos el pentagono dado umo un sistema de varilles reigidas, articula das en sus vir-



tices; de esta forma podemos la figura 1 en un trianla figura 1 en

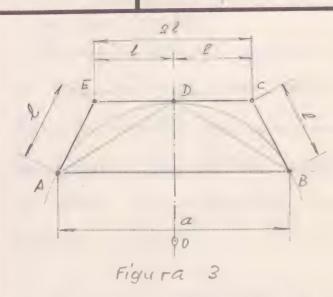
guls isosceles, seguen se re
presenta en la figura 2,

1 sue los vértices E 2 C

esten alineados con los A, D g B, D, cespectivamente. Eracemos a continuación la circunferencia de centro 0, circumscrita al triangulo A.D.B. Los puntos E y C son pues, interiores a dicha circumferencia, por ser puntos intermedir, de la cegnicia A.D. g. D-B, y estos : cuerdas de dicha circumferencia.

Gransformemos de meso el pentagono de la fiquera 1, hasta consequer que les vertices E, D 2 C,





representa en la figure :;

el pentagono dado se trans
france en el trajeccio sin
celes A-B-C-E, en el que

el vértice D es el centro

de la base E-C.

Unamer a continuación D, con A J B, J tracemos

la circumferencia circumserita al triangulo A-D-B

(también isóscoles); la aceta E-C, será pues tangente
a dicha circumferencia (un centro o está en el eje de
simetria del trapeció A-B-C-E J del triangulo A-D-B).

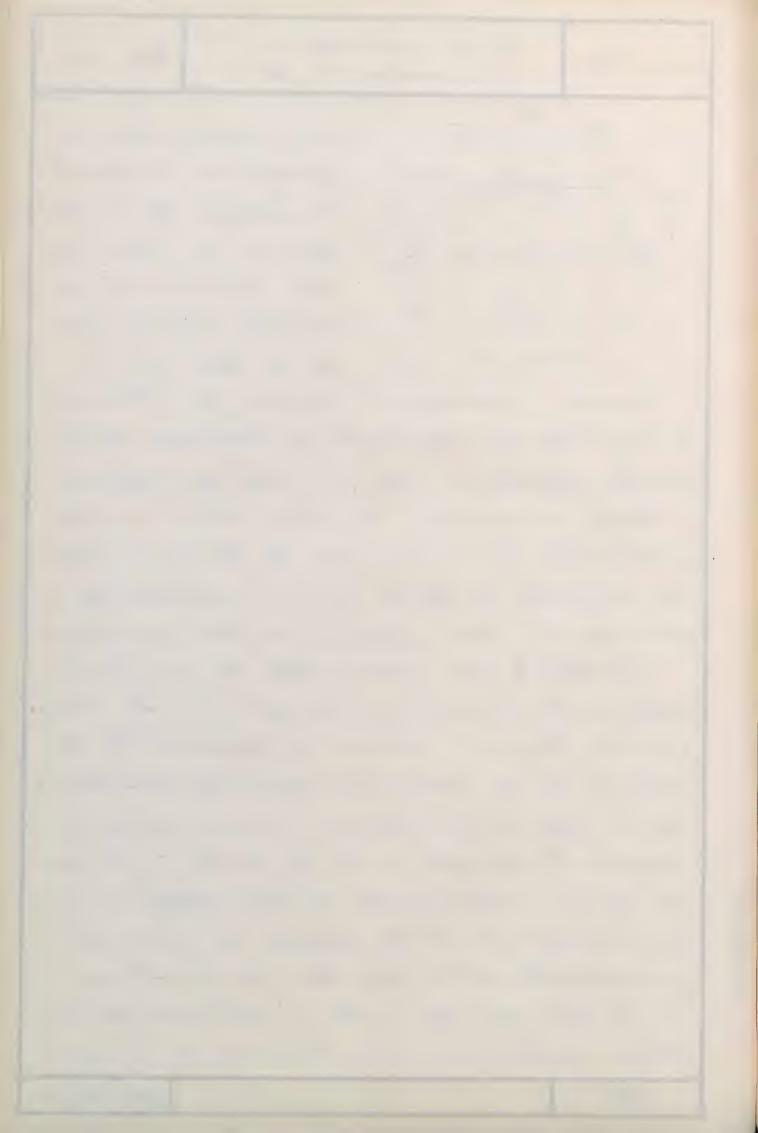
Por consigniente los puntos E J C, pertenecientes a

dicha tangente serán exteriores a decha circumferencie.

Considerando que podemos pasar de una forma continua del triángulo de la figura 2 al trapecio de la figura 3 mediante el acercamiento del vértice D a su tado A.B., supuesto este imanovil, y que en cada posición trazamos la circumferencia circumscrita al triángulo A.D.B., los puentos C y E, pasaran de una determinada porición interior de nema circumferencia, a otra exterior sumamente proceima, y por consigniente por otra intermedia que los contenga, ten esta posición limite, el pentagono dado,

estara inscrito un una circumfercucia (s. s. q. d.).

CEQ.



No existe sommer majora escacta, con la recia y compar, al problema planteado de encontrar la anterior circunferencia limite, ya que como veremos a continuación, la relucion mualities para la obtención del cadre "m" de diche circumferencia conduce a la resolución de una ecuación enbica.

SOLUCION ANALITICA

Inpongamos el problema resuelto en un caso cualquie-

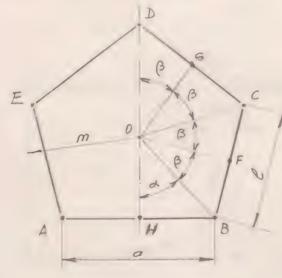
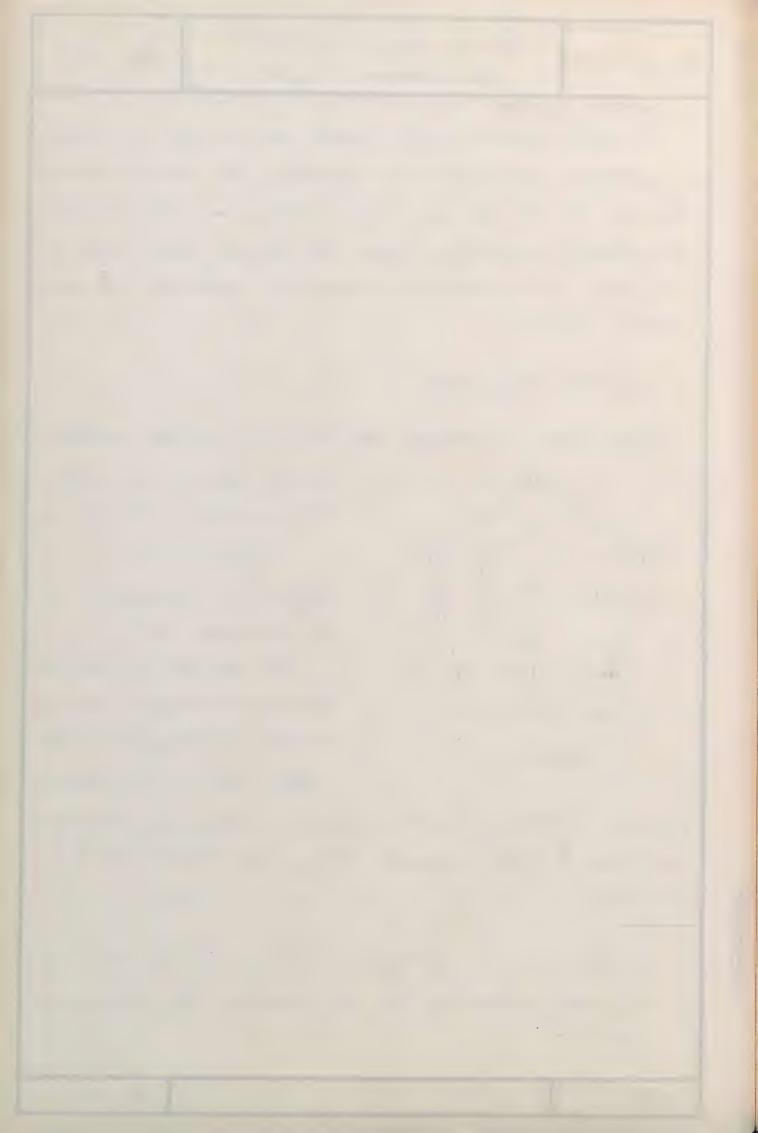


Figura 4

na, en que re cumpla la condicion (2) de ser $\frac{a}{4} < \ell < \infty$ regnen se representa en la figura 4. La volucion de este problema se consigne al 06. tener la magnitud del Madio "m" de la circum-

forcucia circumscrita al pentagono irregular A-E-C-D-E que tiene 4 lado ignales (1) q uno deseguel (a) (a > l).

ba figura 4 es análoga a la fic. 1 de la lacureta 33, que retilisames en la solución del Arquinu-



UNE A4 210 X 2

Just se encuentra el centro 0 de la circumfuer cia podida; dicho eje es la onediatrie del lado AB (a), je parasa pues por el punto H, medio del regenento AB

Unannos los vértices B y C con el centro 0, así como

los F y G, centro de los lados DC y CD respectivamente.

Con esto se cros formará el auguelo H-0-B = x y

los todos equales B-0-F = F-0-C = C-0-G = G-0-D = B,

verifican dos e que

$$\alpha + 4\beta = 77$$
 (3)

El radio "m" bescado de puede obtener en función de " β " γ " ℓ ", ya que $08 = \frac{BF}{\text{nen }\beta}$, c rea

$$m = \frac{\frac{\ell}{2}}{\text{nen }\beta} = \frac{\ell}{2 \text{ nen }\beta} \tag{4}$$

Para la obtención de B" arquirements el significate pro ceso, de acuerdo con la fig. le

$$ALL X = \frac{HB}{0B} = \frac{\frac{a}{2}}{m} = \frac{a}{2m}$$
 (5)

$$seu \ l^2 = \frac{8F}{CB} = \frac{l}{m} = \frac{l}{2m}$$
 (6)

dividiendo (5) pr (6)

$$\frac{nen \ d}{nen \ 2} = \frac{a}{2m} : \frac{l}{2m} = \frac{cl}{l}$$
 (7)



pres with a mention of the sections:

181

of terinodo en cucuta 171 g 181

(0)

Desarrollando (a. (a)

À .- Ecc

de doude

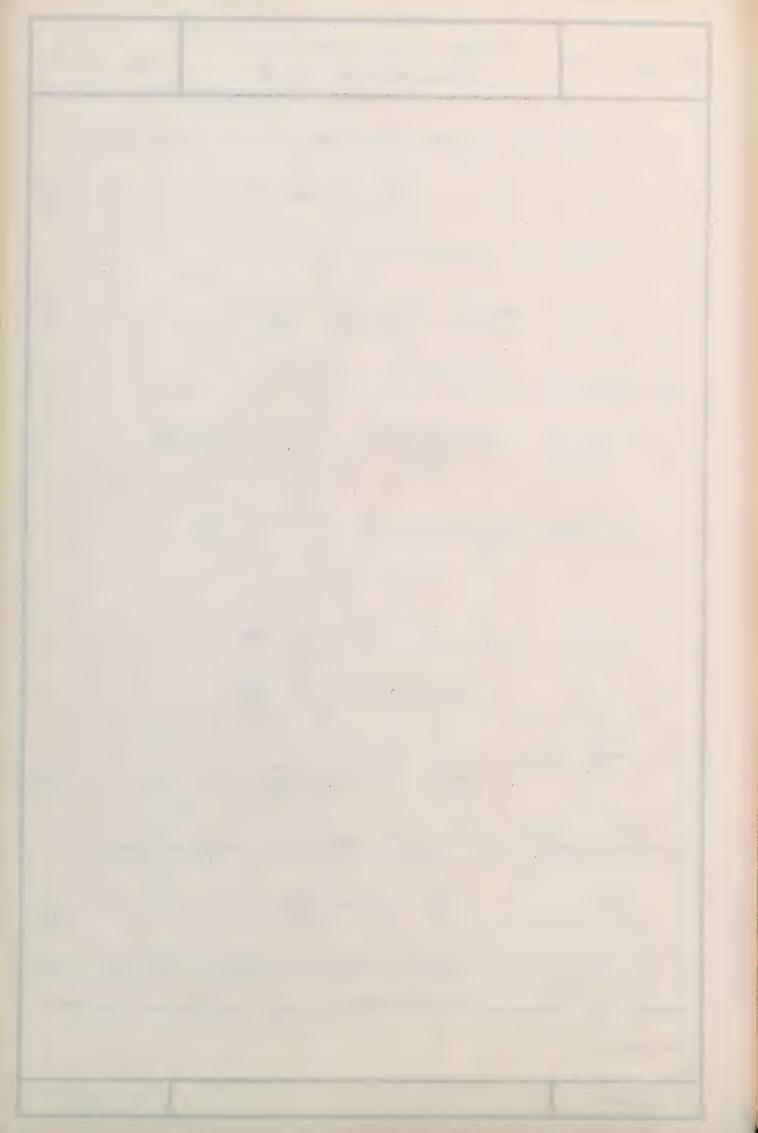
$$\cos^{2}\beta - \frac{1}{2}\cos\beta - \frac{\alpha}{90} = 0$$
 (10)

ecuación enbica en "cos B". - Baciendo en B= Z, será

$$x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{a}{8\ell} = 0 \tag{11}$$

Las tres caices de esta ecuación pueden obtenerse apli. cando la Formula de Cardano, que exponemos a timuración.

2? - 12 - 72



Para ello, transformemos previamente la ecuación (11), ha cien do

por lo que tendremos

$$x^3 + px + 9 = 0 \tag{12}$$

forma reducida de una ecuación cubica completa.

Haciendo por otra parte

$$\mathcal{R} = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

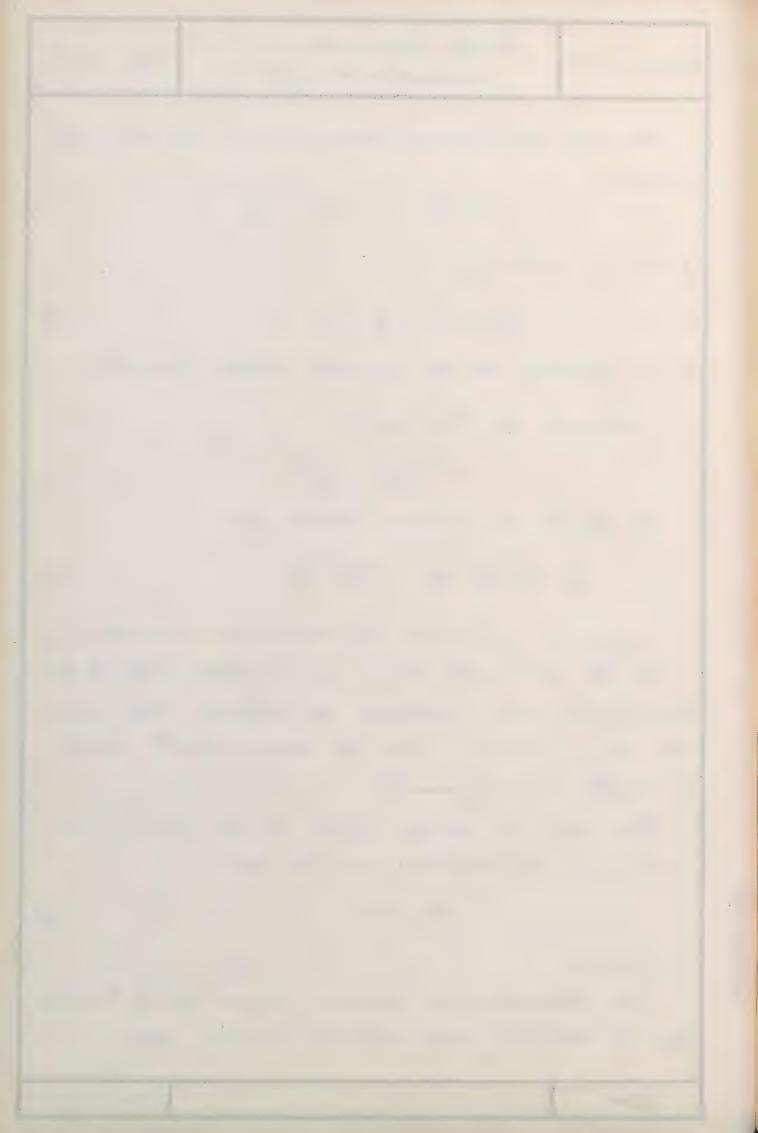
la fórmula de Cardano expresa que

siendo x, una de las tres vaices de la ecuación (12): Las des raices aestantes "x" y "x3" el obtienen ceduciendo la cui lica (12) a una cuadrada, al divider dicha ecuación por "x-x1. - Estas des naices restantes pueden ser reales o imaginarias.

Para que la primera raix "x," sea real, es measario se verifique en (13) que

$$R \neq 0$$
 (14)

[&]quot; Ver " Natematicas para Incomiera ; Técnicos de la Sorfling, pag. 58. - Editorial Gustavo Gili, S.A. - Barcelona 1945.



1800 at 9

por le que también resa VR \$ 0.

En el 200 de ser R >0, tendescuos una rais relat g dis imaginarias.

Li fuese R = 0, las tres raices son reales, riendo des de ellas ignales $(x_2 = x_3)$.

En el caso de ser R<0 (caso irreducible), un volución obliga a operar en el campo complejo, obteniendose trees raices reales diferentes.

SOLUCION DEL PROBLEMA EN CASOS PARTICULARES

1º Caso Arquimediano I

Namos a hacer uso de la solucion general plantea. da, a diversos casos particulares, comenzando por el del "Arquimediano I".

En este se verifica que \frac{a}{t} = \tau2, viendo pr courigniente

$$\ell = \frac{\sqrt{2}}{2} a = 0.70 71 06 8... a$$

en la ecuación vibica (11) rera

$$\frac{a}{8\ell} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

por lo que aquilla se transformara

23 - 12 -



$$x^{2} - \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{8}$$

y haciendo
$$p=-\frac{1}{2}$$
 $g=-\frac{\sqrt{2}}{8}$

$$R = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{k}{3}\right)^3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{8}, 2\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}, 3\right)^3 = \frac{1}{2^{\frac{3}{4}}} - \frac{1}{2^{\frac{3}{4}} 3^2} =$$

$$= \frac{2^{3} \times 3^{3} - 2^{\frac{7}{4}}}{2^{10} \times 3^{3}} = \frac{3^{3} - 2^{\frac{4}{4}}}{2^{\frac{7}{4}} \times 3^{\frac{3}{3}}} > 0$$

7 por consigniente

$$\sqrt{R} = \sqrt{\frac{3^3 - 9^4}{3^3 \times 3^3}} = \sqrt{\frac{41}{3456}} > 0$$
 for to que to do que to do que to do que to de q

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{3}} = \sqrt[3]{-\left(-\frac{\sqrt{2}}{8}:2\right) + \sqrt[3]{\frac{11}{3456}}} +$$

$$+\sqrt[3]{-\left(-\frac{\sqrt{2}}{8}:2\right)}+\sqrt{\frac{11}{3456}}=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{16}+\sqrt{\frac{11}{3456}}}+\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{16}-\sqrt{\frac{11}{3456}}}=$$

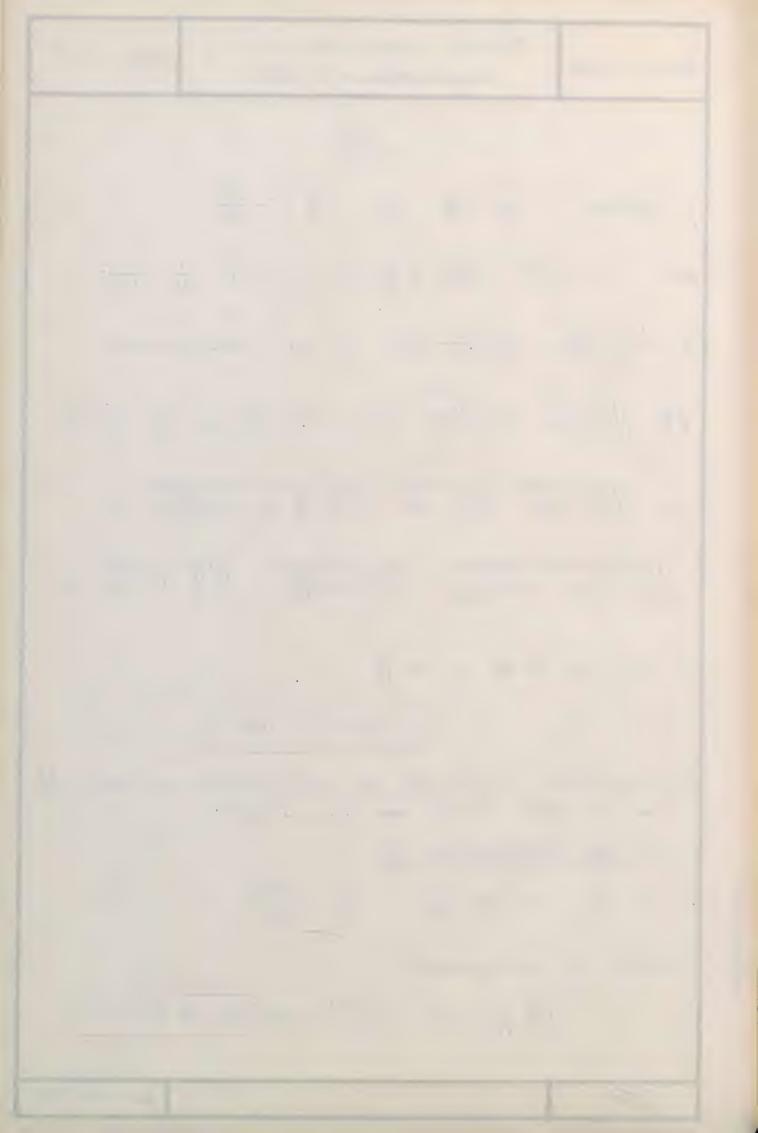
(ver desarrolle y aplicación de este cálculo, en lam. 33). Las des aniels restantes son imaginarias

2º Caso Arquimediano II

En este se verifica que
$$\frac{a}{t} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

riendo por consigniente

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{5}+1}}^{2} a = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{4} a = \begin{bmatrix} 0.61 & 0.33 & 99. & 9 \end{bmatrix}$$



en la ecuación cubira (11) ana:

$$\frac{\alpha}{8\ell} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2 \times 8} = \frac{\sqrt{5} + 1}{16}$$

por lo que a quelle se transformes à en

$$x^{2} - \frac{1}{5}x - \frac{\sqrt{5} + 1}{16} = 0$$

2 haciendo

$$p = -\frac{1}{2}$$
 $q = -\frac{\sqrt{5} + 1}{16}$

$$R = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \left(-\frac{15 \times 1}{16} : 2\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} : 3\right)^3 = \frac{\left(\sqrt{5} + 1\right)^2}{32^2} - \frac{1}{2^3 \times 3^3} = \frac{1}{32^2} = \frac{1}{2^3 \times 3^3} = \frac{1}{2^3 \times 3^$$

$$= \frac{3 + \sqrt{5}}{16 \times 32} = \frac{(3 + \sqrt{5}) \times 2^{3} \times 3^{3}}{2^{12} \times 3^{3}} = \frac{(3 + \sqrt{5}) \times 2^{3} \times 3^{3}}{2^{12} \times 3^{3}} = \frac{(3 + \sqrt{5}) \times 3^{3} - 2^{6}}{2^{9} \times 3^{3}} = \frac{3^{4} - 2^{6} + 3^{3} \sqrt{5}}{2^{7} \times 3^{3}} = \frac{3^{4} - 2^{6} + 3^{3}}{2^{7} \times 3^{3}} = \frac$$

por la que tendremos:

$$x_1 = \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt{\frac{9}{2} - \sqrt{R}} = \sqrt{\frac{3}{-(-\frac{\sqrt{5} + 1}{16} : 2)} + \sqrt{\frac{17 + 27\sqrt{F}}{13834}} + \sqrt{\frac{17 + 27\sqrt{F}}{13834}} + \sqrt{\frac{17 + 27\sqrt{F}}{13834}}$$

$$\sqrt[3]{-\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{16}:2\right)-\sqrt{\frac{17+27\sqrt{5}}{13824}}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{32}+\sqrt{\frac{17+27\sqrt{5}}{13824}}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{22}+\sqrt{\frac{17+27\sqrt{5}}{13824}}} \approx$$

€ 0, 85 77 80 67 ... = cos B

Los des raices restantes son imaginarias

En este caso sera

-50

$$L = \frac{a}{4} = \begin{bmatrix} 0,25 \times a \end{bmatrix}$$



en la ecuación cubica (11) sera:

$$\frac{a}{g\ell} = \frac{4}{g} = \frac{1}{2}$$

por la que aquilla se transformara en

$$x^{2} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$$

donde ce ve de immediats que tiene una rais real $\frac{x_1 = 1}{x_1}$, que la verifica, y que al dividir la ecuación por $x - x_1 = x - 1$, da lugar a otra de regrumdo quado con sus dos raices restantes x_2 y x_3 invaginarias conquegadas.

Li independientemente de esto, aplicames la forcomela general de Cardano, haciendo

$$\beta = -\frac{1}{2}$$
 $q = -\frac{1}{2}$

sera'
$$R = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\cdot 2\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\cdot 3\right)^3 = \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^3 \times 3^3} = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2$$

$$= \frac{2^{3} \times 3^{3} - 2^{4}}{2^{7} \times 3^{3}} = \frac{3^{3} - 2}{2^{4} \times 3^{3}} = \frac{2^{5}}{2^{4} \times 3^{3}} > 0 \quad \text{y pr consigniente}$$

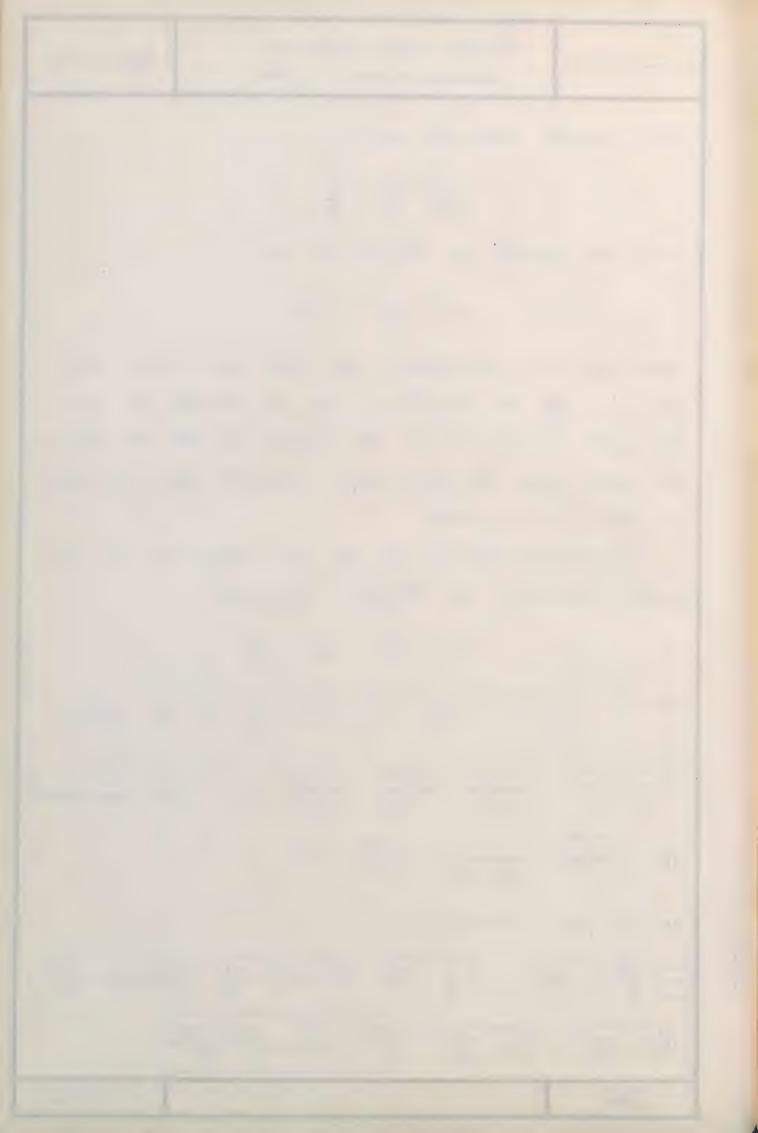
$$\sqrt{R} = \sqrt{\frac{5^2}{2^{4} \times 3^{3}}} = \frac{5}{2^{2} \times 3 \times \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{36} > 0$$

por lo que tendremos:

$$\boxed{x_1} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{R}} = \sqrt[3]{-(-\frac{1}{2}:2) + \frac{5\sqrt{3}}{36}} + \sqrt[3]{-(-\frac{1}{2}:2) - \frac{5\sqrt{3}}{36}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{-\frac{1$$

$$=\sqrt[3]{\frac{1}{4} + \frac{5\sqrt{3}}{36}} + \sqrt[3]{\frac{1}{4} - \frac{5\sqrt{3}}{36}} = \sqrt[3]{\frac{9+5\sqrt{3}}{36}} + \sqrt[3]{\frac{9-5\sqrt{3}}{36}}$$

CEC



mas teniendo en inenta el valor de "x," ya obternido anteriormente, podemos escriber la estable propiedad momerica segment:

$$\sqrt[3]{\frac{9}{36}} + \sqrt[3]{\frac{9}{36}} = 1$$

B = 0°

L' Caso limite en que $\frac{a}{t} = 0$

En este ense esse $l = \frac{a}{b} = \infty$

en la ecuación cúbica (11). le de unos

 $\frac{a}{8e} = \frac{0}{8} = 0$

por lo que aquella se transformará en

 $x^3 - \frac{1}{2}x - 0 = 0$

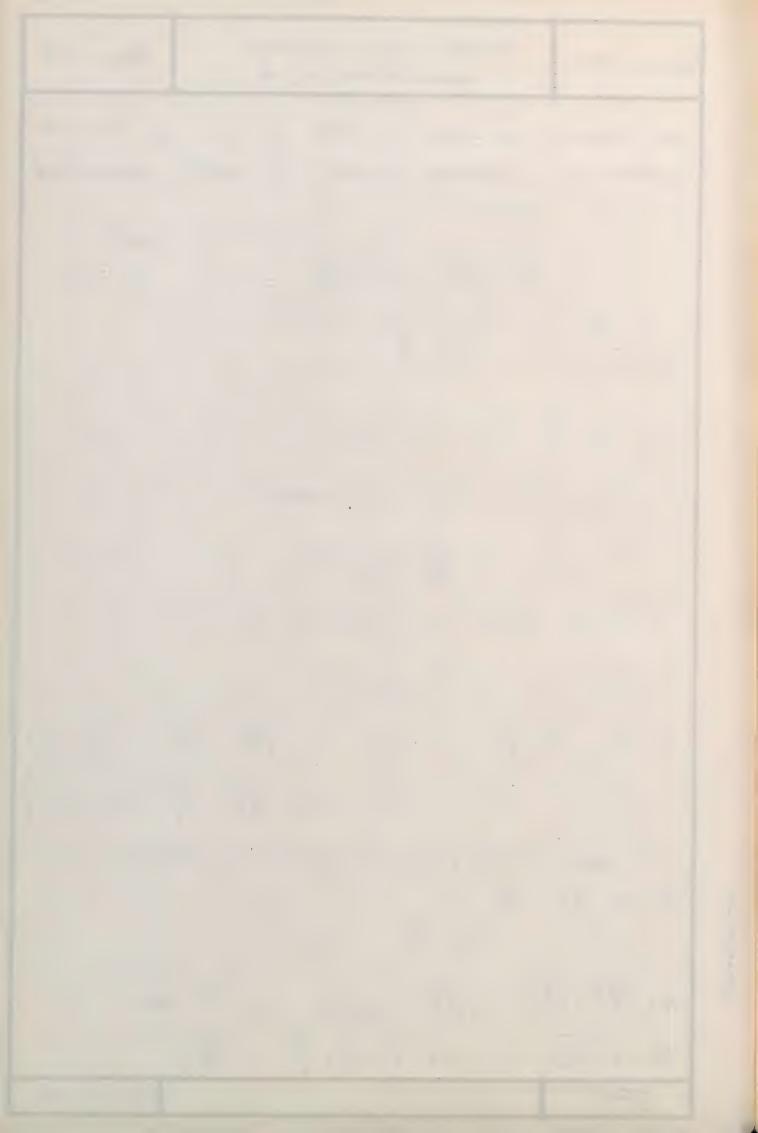
o see $x^3 = \frac{1}{2}x$ $x^2 = \frac{1}{2}$ $x_2 = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $x_3 = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\beta = 45^\circ$

Li aplicamos la formula general de Cartano, tendremos, haciendo

 $\beta z - \frac{1}{2}$ $\beta = 0$

 $R = \left(\frac{9}{2}\right)^{2} + \left(\frac{p}{3}\right)^{3} = \left(-\frac{1}{2 \times 3}\right)^{3} = -\frac{1}{2^{3} \times 3^{3}}$ $\sqrt{R} = \sqrt{-\frac{1}{2^{3} \times 3^{3}}} = \frac{1}{6} \times \sqrt{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{6} \times \frac{\sqrt{6}}{6} \quad i = \frac{\sqrt{6}}{36} \quad i$

FR

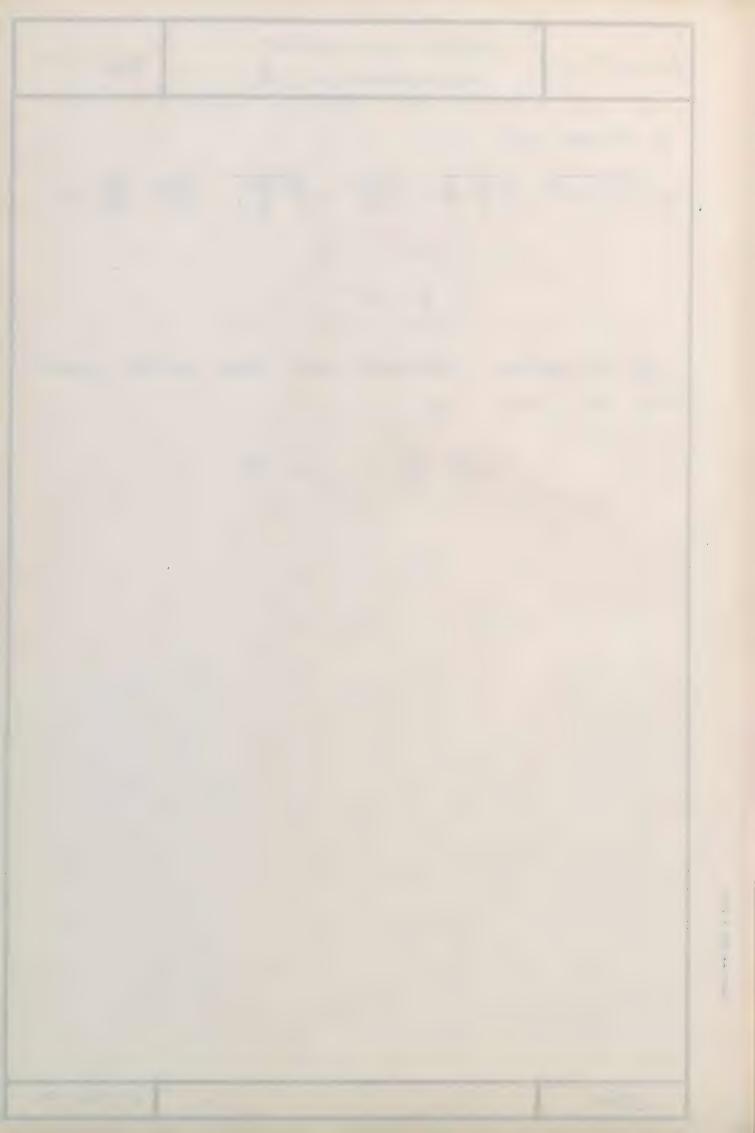


por la que ova

$$x = \sqrt[3]{-\frac{9}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{9}{2} - \sqrt{R}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{6}}{36}}i + \sqrt[3]{-\frac{\sqrt{6}}{36}}i = -\sqrt[3]{\frac{\sqrt{6}}{36}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{6}}{36}} = 0$$

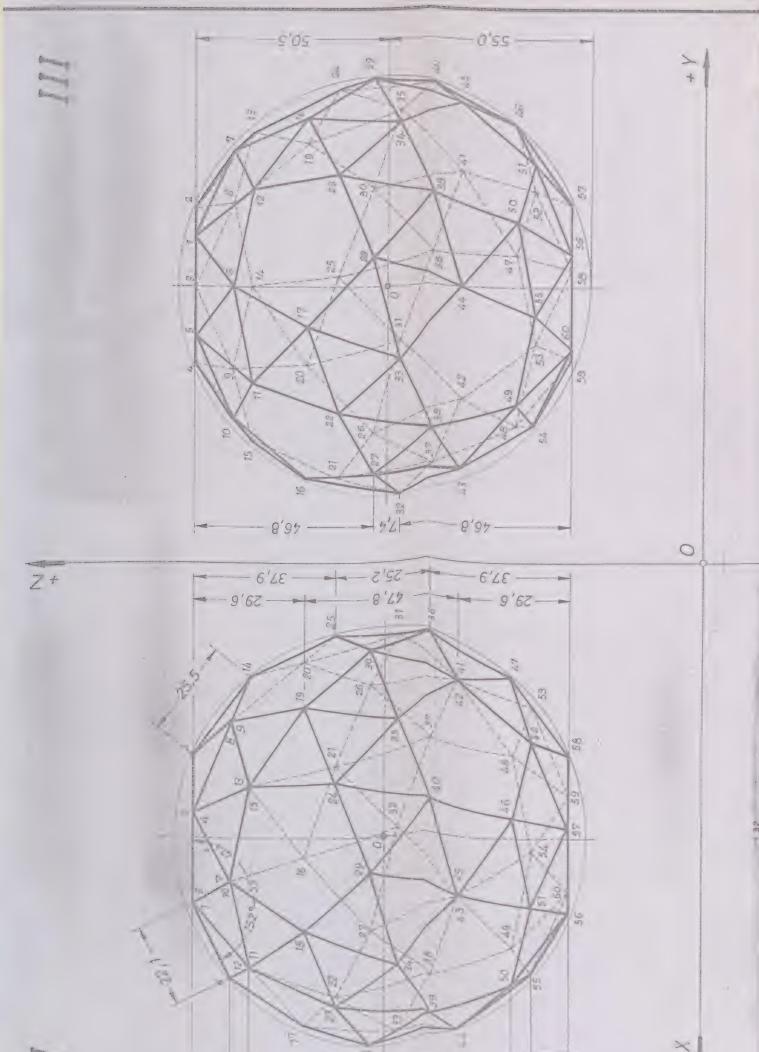
En el probleme planteado solo tiene sentido germetrico la reais "x."

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \beta = 45^{\circ}$$









- 0 51 mm

- 20'02-

-1251-

ARQUIMEDIANO II

Número de caras pentagonales
de de
lúmero Lúmero
~ ~ ~

ENUNCIADO

8 / 8

300 0 W = 3

edni-Representar por el método gráficocada Q en el que en vértice concurren cuatro triángulos láteros y un pentágono regular analítico, en los planos Arquimediano II,

25,5 milímetros y las coordenadas de su cen-La longitud de su lado es de tro 0 son: 0 (72, 72, 85) mm.

esca-Dibujar en formato A3v y a D

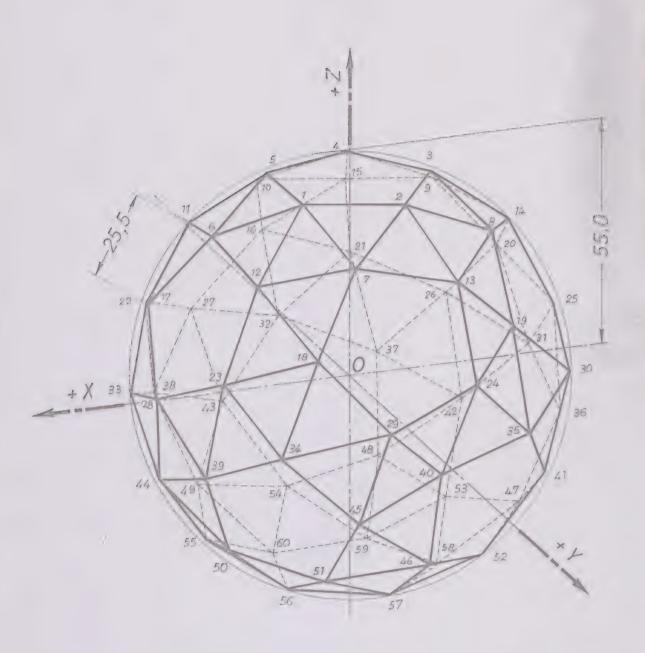
1+

	r scuela	Curso	II
	(firma)		Arquimediano
Califi-	cación		iime
Entregada			Argu
Propuesta De entrega Entregada			
Propuesta			
	Fecha:	Alumno:	Escala 7:7

Lámina 34

Curso 19 - 19







35

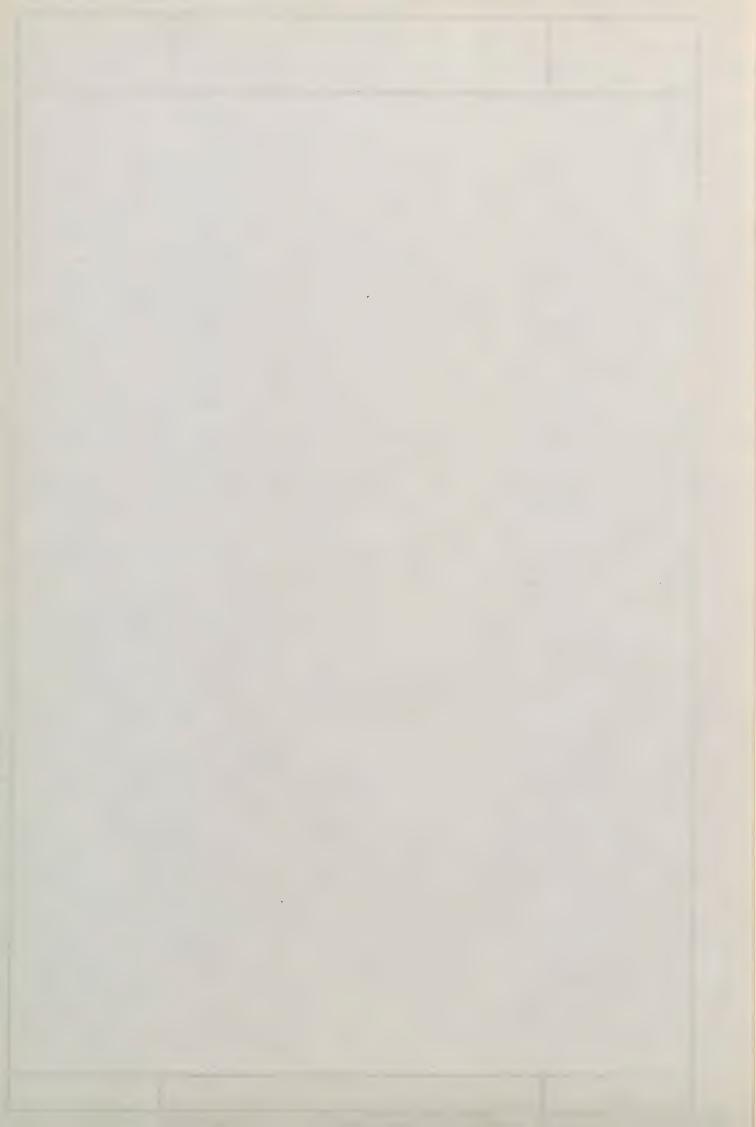
ENUNCIADO

Representar por el oriétodo gráfico-avalitico, en los planos I, II y III. el Arquimediano III en es que en cada vértice concurren dos trianquelos equilatios y de madrados, alternados.

La longiture de su lado es de 55 mm. q las coerdemais et su centro 0, son: 0/72, 75 15/ mm.

 $\frac{\Delta A TOS}{\Delta m} = EE m :$

UNE A4 210 X 297



CONSIDERACIONES PREVIAS

Seguiremos en el estudio de este arguinnediamo, las directrices o sórmulas generales planteadas en el estudio del "Arqui mediano I", lámina 33.

En el caes particular que nos ocupa, determinaremos las magnitudes significantes:

- l: Srista del Arquimediano II (dato del ejercicio)
- a : Radio de la esfera circumscrita
- b : Radio de la espera tangente a las arietas
- C3: Radio de la esfera tangente a las caras trianquelares
- C, : Radio de la esfera tangente a las caras cuadradas.
- d3 : Radio de le circumferencia oircumscrita a una cara triangular.
- d₄ = Radio de la circunferencia circunserita a una casa cuadrada.
- m = Radio de la circumferencia circumscrita al poligono de ternido al unir los extremos de las aristas de un anyuli silido.
- d'au que para por una arista de aquélla.
- or unadrada, con el plano diametral del arqui-



metion. que por por una asita de aquella. You a sugar to restitioned del dienter formado por una conon toin galas y otra cuadrado.

S = Japan Lice

V . Volumen

PROCESO GRAFICO- ANALÍTICO

El estudio realizado de est arque como mos indica que tieno 8 caras equitares tranques ours, y 6 caras cuadradas; 12 restices of 24 anstas.

in sata violèce comencren 2 caras trianquelares, 2 madrates y, la consignence, 4 aristas del mome. Ini pure, teadrous que

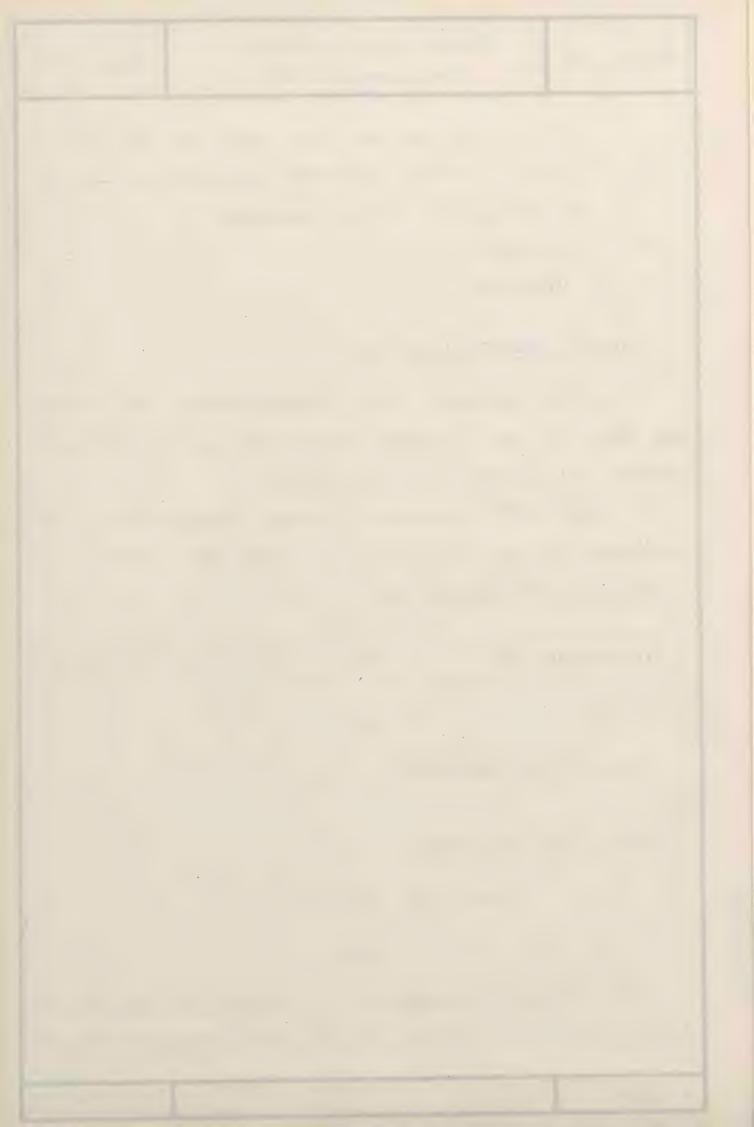
Arquimediano III (2 P3 + 2 P4); C3 = 8; C4 = 6; V=12; A=24

Cálculo de sus magnitudes

Arista "l" del arquimediano

Dato del ejercicio

Radio "m" de la circumferencia circumscrita al poligono obterido al unir los esctremos de las enatro aristas de un an-



ante notido.

Este poligones es un rectanquelo 1803 (Leg. 2), moi de

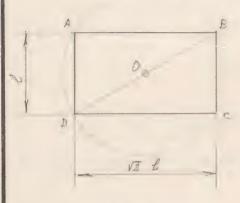


Figura 1

cuyos lados es el lado del arquionediano (lado de se cenas trianquelares), el otro la diagana de las
caras cuadra das.

il radio pedido una la cernidiagneal OD de dedes restanças.

In valor med ques

$$\tilde{Q}\tilde{D} = m = \frac{1}{2} \sqrt{l^2 + (\sqrt{2} l)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} l = 0.86 60 25 4... l$$

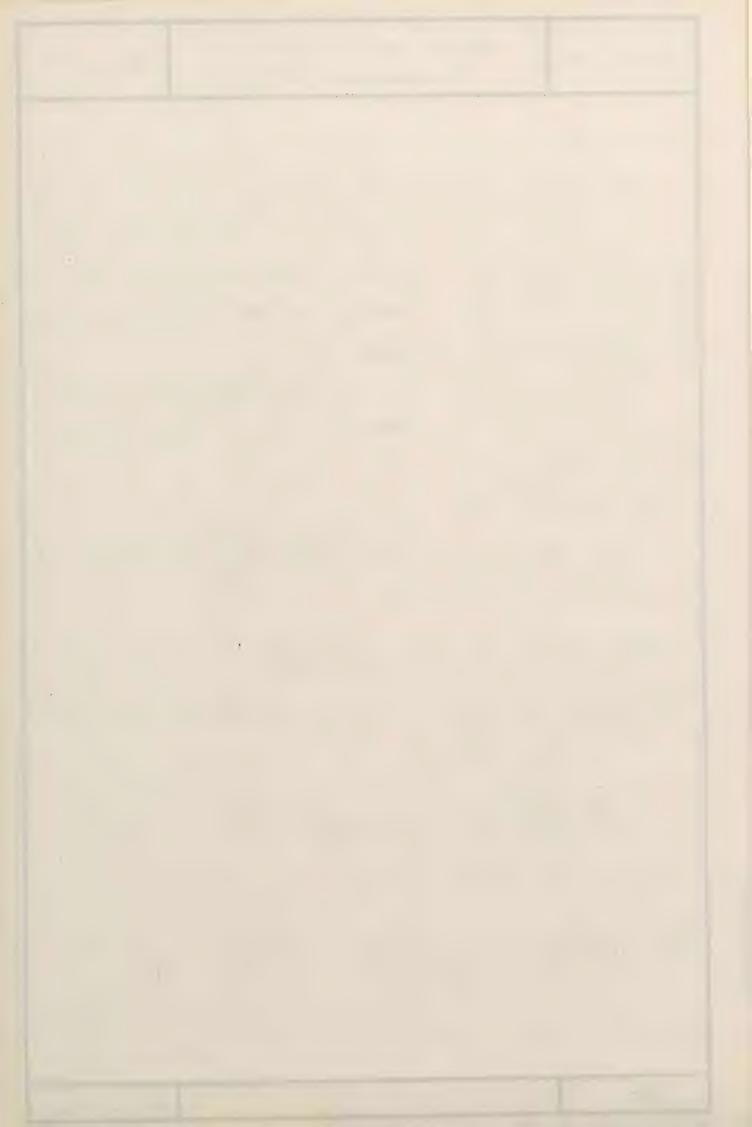
Radio "a" de la esfera circumscrita

se obtiene aplicando la soiemula general [1] (ver lam. 33)
a este caro particular de "m"

$$a = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - m^2}} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - (\frac{13}{2}\ell)^2}} = \ell$$

Desarrollo del calculo auterior:

$$\boxed{a} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - (\frac{\sqrt{3}}{2}\ell)^2}} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - \frac{3}{4}\ell^2}} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{1 - \frac{3}{4}\ell}} = \frac{\ell}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} = \ell$$



Restio "b" de la refera tancente a les austes

Islando la sermete querai [3] (var lam. 33), tendemes:

$$b = \sqrt{a^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}} = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell = 0.26 \text{ GC 25 4...} \ell$$

Radio "do "de la circumferencia circumscrita a una cara triangular de la de "l"

Le dennestes en Jeometria, es

$$d_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} l = 0, 57, 73, 50, 27 \dots l$$

Radio "du" de la circumferencia circumscrita a una cara enadrada de lado "l"

Le denmestra en geometria, es

$$d_{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} l = 0,7071068... l$$

Radio "c," de la estera tangente a las casas trianque-

Aplicando la firmula queval [2] (ver lane, 33), tendremis:

$$C_3 = \sqrt{a^2 - (d_3)^2} = \sqrt{\ell^2 - (\frac{\sqrt{3}}{3}\ell)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\ell = \frac{\sqrt{6}}{3}\ell = 0.81 \text{ 64 96 58...} \ell$$

(3)



de la le "

Aplicando la formula general [2] (me lan. 32), tentremes:

$$C_4 = \sqrt{a^2 - (d_4)^2} = \sqrt{\frac{1^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2} \ell)^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} \cdot \ell - \frac{\sqrt{2}}{2} \ell = 0.70 \text{ 7/ C6 S.} \ell$$

Impulo rectilineo "«, " del diedro formado por una cara triangular, con el plano diametral del arquimediano en pasa por una arista de aquella.

Le determina, en funcion de en tangente, por la formula quant [5] (ver lam. 33):

$$\frac{1}{2} \alpha_{3}^{\prime} = \frac{2 c_{3}}{\sqrt{4 (d_{3})^{2} - \ell^{2}}} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{6}}{3} \ell}{\sqrt{4 (\frac{\sqrt{3}}{3} \ell)^{2} - \ell^{2}}} = 2 \sqrt{2} = 2.82842712...$$

Desarrollo del calculo auterior:

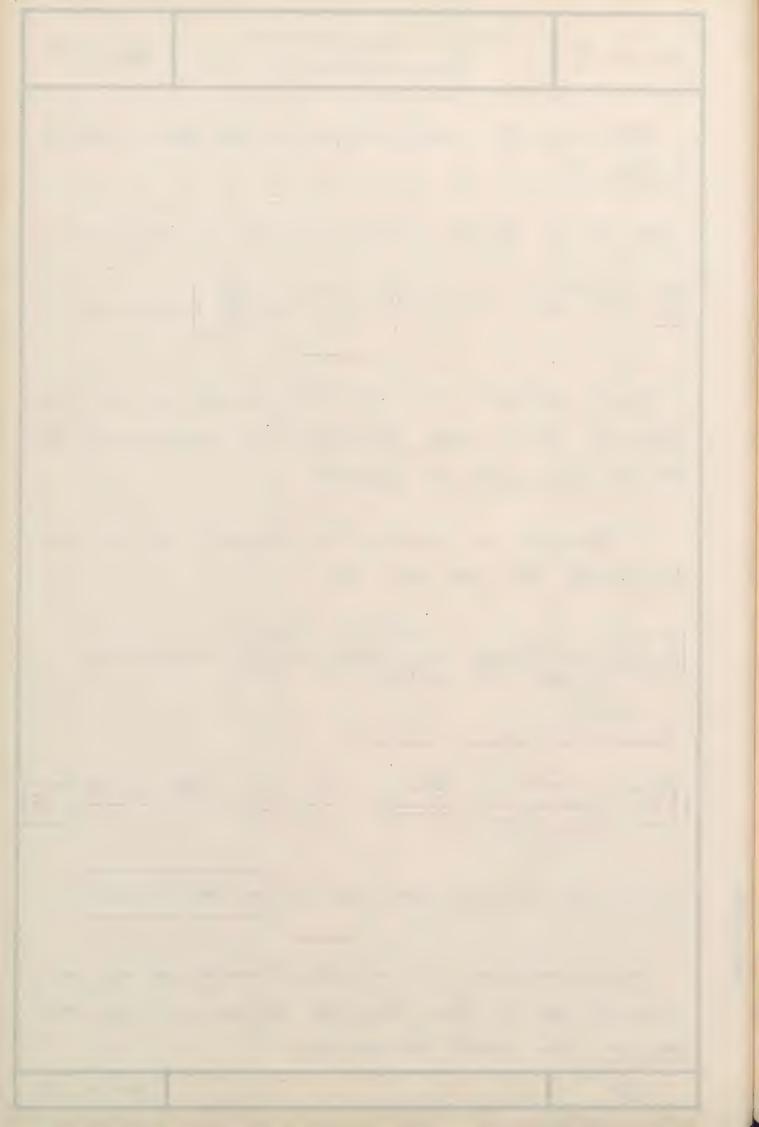
$$\frac{1}{3} \propto_{3} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{6}}{3} \ell}{\sqrt{4 \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \ell\right)^{2} - \ell^{2}}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}$$

b = 2 = 2.82 24 27 12 = 0.451 5450

Angelo ciclilines "x," del diedro formado por una cara cuadrada, con el plans diametral del arquimediamo que pasa por una arista de aquella.

(E)

20 - 2 - 73



Le determina, en presente de en tongente, por la son -

 $\frac{2 c_4}{\sqrt{4 (d_4)^2 - \ell^2}} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \ell}{\sqrt{4 (\frac{\sqrt{2}}{2} \ell)^2 - \ell^2}} = \sqrt{2} = 1, 21 42 13 56 \dots$

Desarrollo del cálculo auterior:

mula general [6] for lane. 33)

 $\frac{1}{5} \propto_{4} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \ell}{\sqrt{4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \ell\right)^{2} - \ell^{2}}} = \frac{\sqrt{2} \ell}{\sqrt{(2-1) \ell^{2}}} = \sqrt{2}$

ly to de = log. 1, 41 42 13 56 = 0, 150 51 50 (x = 54° 44' 8,2"

Angulo rectilines " 9 " del diedro formato por una

cara triangular o una cuadrada

Aplicando la jornme general [4] (ver lain. 33), tendremos:

43-4 = ×3 + ×4 = 70° 31' 43,6" + 54° 44' 8,8" =

Comprobación:

Loudo 43-4 = x3 + x4, tendrems que

寿 り3-4 = ラベ3 + ち ベ4 = 2 V2 + V2 = 3 V2 = - 5 ベ4 1- ち ベ3 ち ベム 1- 2 V2 × V2 = 1-4 = - 1-4

7 por lo tanto:

13-4 + 04 = 125° 15' 51,8" + 54° 44' 8,2" = 180° (explementaries

10 - 2 - 73



Area lateral & sel organizacións

le compone de 8 cares trianquilants y 6 card-des, à la-

$$S = S + \frac{\sqrt{3}}{4} \ell^2 + 6 \ell^3 = (2\sqrt{3} + 6) \ell^2 = 2(\sqrt{3} + 3) \ell^2 = 9, 46 \text{ M M 63...} \ell$$

Tolumen V del as an inclosus

lar q attura "c," q to s piramides de l'au curatra la q altura "c,": un salor resa:

$$V = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \ell^2 \times \frac{C_2}{3} + 6 \ell^2 \times \frac{C_4}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \ell^2 \times \frac{\sqrt{6}}{3} \ell + 2 \ell^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \ell =$$

$$= \frac{5 \sqrt{2}}{3} \ell^3 = 2.35702260...\ell^3$$

Desarrollo del calculo auterior;

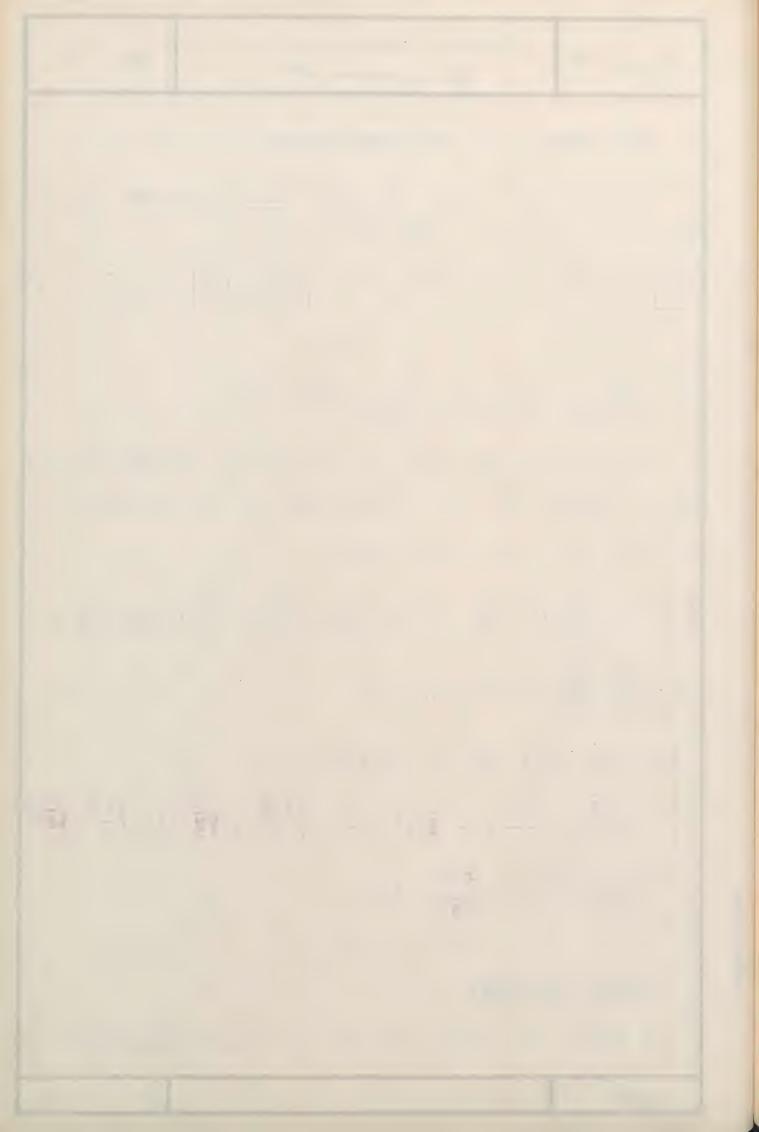
$$V = \frac{2\sqrt{3}}{3} \ell^{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3} \ell + 2 \ell^{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \ell = \left(\frac{2\sqrt{18}}{9} + \sqrt{2}\right) \ell^{3} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} + \sqrt{2}\right) \ell^{3} = 5\sqrt{2}$$

FIGURA CORPÓREA

Le obtiene por acoplamiento de 8 triangulos quelles ;

C.C.C.

20 - 2 - 3



Es ancuman Etanogalo que en destrador.

levier angulades calculadas.

CUADRO SINOPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado		
a	l	1.00 00 00 {		
Ь	√3 2 ℓ	0.86 60 25 l		
C ₃	<u>√6</u> ℓ	0.81 64 97 2		
C4	V2 2	0.70 71 07l		
d_3	<u>√3</u> ℓ	0.57 73 50L		
- d ₄	V2 2	0, 70 71 07l		
m	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ ℓ	0, 86 60 25l		
ø3	tg \(\alpha_3 = 2\sqrt{2} \)	tg. $\alpha_3 = 2.82.84.27$ $\alpha_3 = 70^{\circ} 31' 43,6''$		
×4	łg. ∠4 = √2	tg <4 = 1, 41 42 14 <4 = 54° 44' 8.2"		
Ψ ₃₋₄		Ψ ₃₋₄ • 125° 15′ 51,8″		
S	2 (V3 +3) l²	9.46 41 02 2		
V	5 VZ 23	2, 35 70 23 l ³		
Relaciones entre magnitudes				
a = 1	b = m	$C_4 = d_4$		



des en la lamina 35. a la representación del arquinestimo.

Il cuyo lado conocido, es de 55 mm.

previamente las arquieretes mai minimi.

to = (dato del ejercicio) = 55,0 mm

 $\alpha = \ell_{\overline{M}} = 55,0 \text{ mm}$

b = 0,86 66 25 ... × 55 = 47.6 mm

C2 = 0, 81 64 99 . * 55 = 44,9 mm

C = 0,70 71 07 ... × 55 = 38.9 111 11

a = 0,57 73 50 --- × 55 = 31,7 mm

04 = 0, 70 71 07 --- x 55 = 38,9 mm

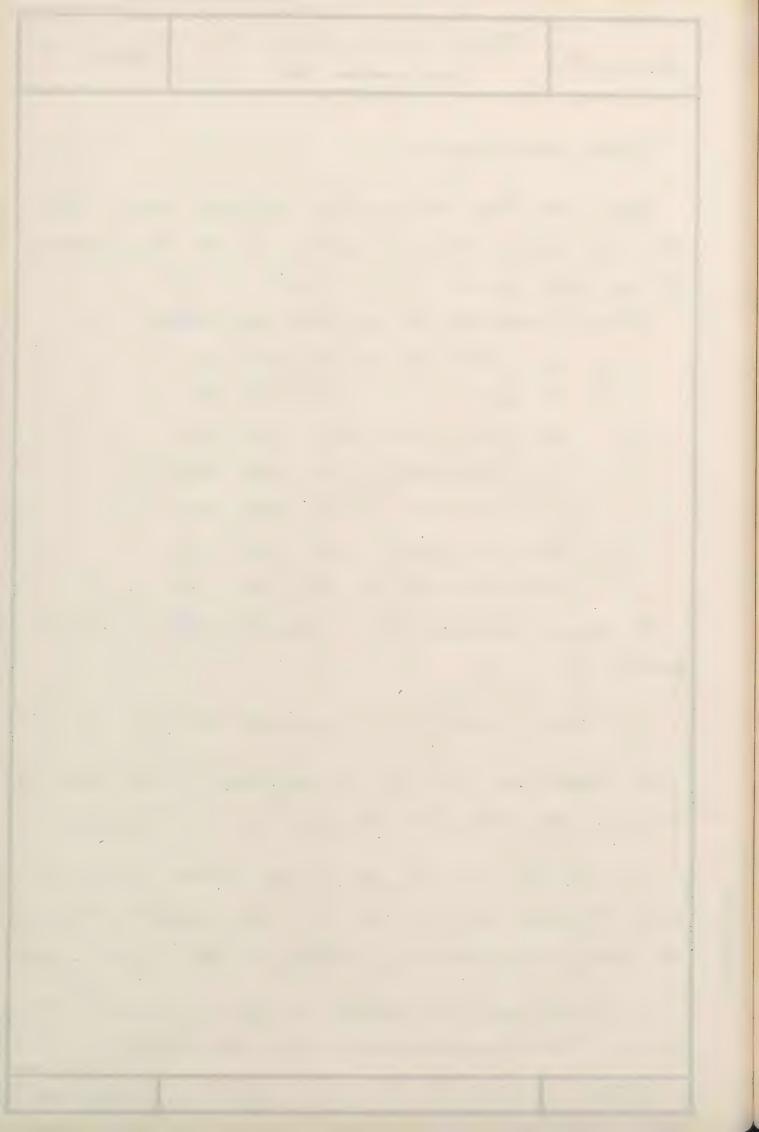
El orden de operaciones para el trasado gráfico, es el si-

1º Liture et que o de acromo de 72, 72, 85.

2º Dibujar en I, II ; II las proyecciones de la esfera cir currerit, de radio a = 55 mm.

3º Representar en I, II g III la cara madrada 1-2-3-4, anpuesto el esticolo colocado con dicha cara paralela a II g un
lado (1-4) perpendicular a I (utilicese la cota "C" en I g III).

4º Enasar en II el cuadrado 5-6-7-8, cincursorito al 1-2-3-1. (latos perpendiculares a las diagonales).



UNE A4 210 X 29

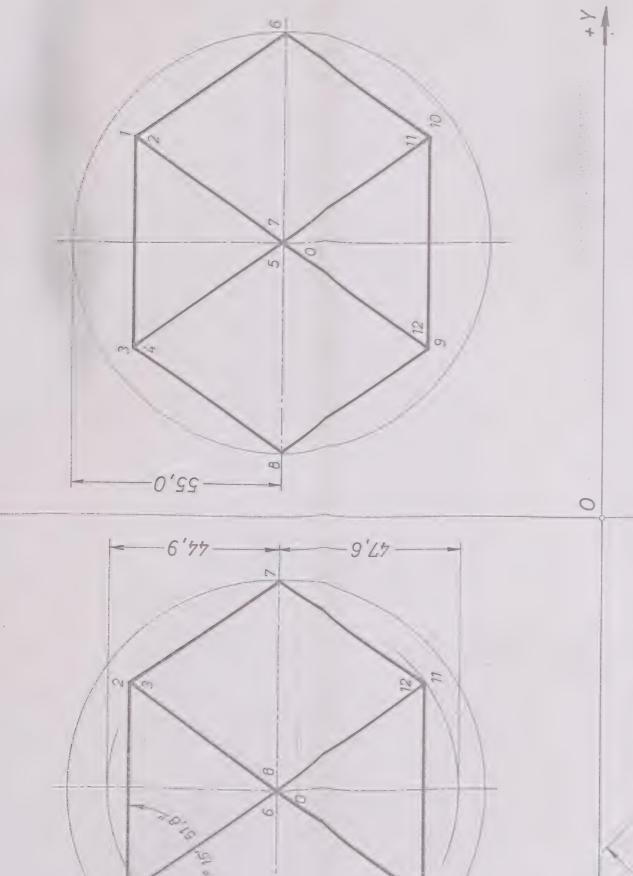
En l'an et hours na continte pour trainment le representacion en I g III, por cometre asciel, pudicude soververce que son équales de formes, por me en la me respecte à la esteración de réstires

magnitudes "b", "c3" g "da = C4".





Z+



5'88

ARQUIME DIANO III

60	11	= 12	24	2C4
ر س	2	>	<	2 C3 +
caras triangulares	caras cuadradas	vértices	aristas	caras de un ángulo sólido:
de	de	de	d e	0
Número	Número	Número	Número	Número

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el Arquimediano III, en el que en cada vértice concurren dos triángulos equi-láteros y dos cuadrados.

La longitud de su lado es de 55milímetros y las coordenadas de su centro 0 son: 0 (72, 72, 85) mm.

55,0

Dibujar en formato A3v y a escaa 1:1.

1+

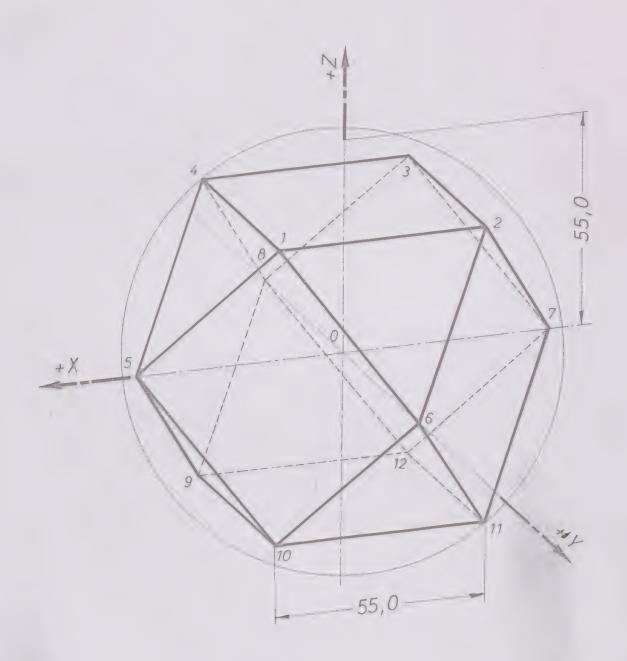
	(firma)			Arquimediano
Califi-	cación			ime
Entregada				Argu
Propuesta De entrega Entregada				
Propuesta				
	Fecha:	Alumno:	Escala	1.1

Escuela

11

Lámina 35 Curso 19 -19







ENUN CIADO

cada vertice concurren dos tous un el que an pena res requires a requirementos.

das de su centro 0, son 0 (72. 22. 85) mm.

Dibujar en formats 23 v q a escria 1:1

DA70S O(72, 72, 85) mm



CONSIDERACIONES PREVIAS

trices y formulas generales planteadas en el estudio del "La quimediano I", lamena 33.

magnitudes signientes;

t = Arista del arquimediano IV. (dato del ejercicio)

a = Radio de la esfera circumscrita.

b : Radio de la espera tangente a las aristas

C3 = Radio de la espera tangente a las caras triangulares.

c5: Radio de la esfera tangente a las caras pentagonales.

d3 = Radio de la circumferencia circumscrita a una ca-

ds: Radio de la circumferencia vircumserità a una cara pentagonal.

m = Radio de la circumferencia circumserità al poligomo obtenido al nenir los esctremos de las aristas de un ángulo solido.

«3: Angulo rectiline o del diedro formado por una cara triangular, con el plano diametral del arquimediamo, que para por una arista de aquélla.

aa pentagonal regular, con el plano diametral del

CCC



Es := Angulo cectiliares del diedro formado por una cara

triangular o otra pentagonal.

S = Luperficie

V = Nolumen

PROCESO GRÁFICO - ANALÍTICO

El estudio cealizado de este arquimediano, mos indica que se compone de 20 saras trianquelares requelares, y 12 caras pentagmales regulares; 30 vértices y 60 anistas.

quelares q des pentagonales q, por consignmente, La aristas del mismo.

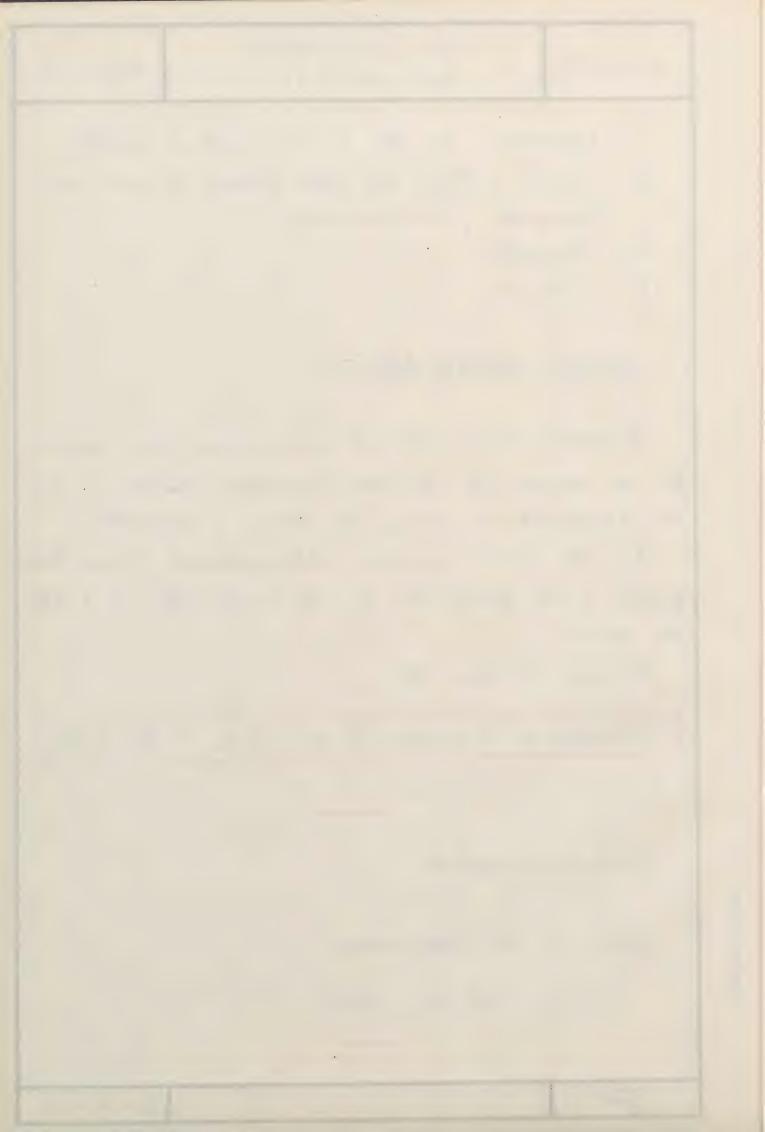
Asi pues, tendremos que

ARQUIMEDIANO IV (2 P3 + 2 P5); C3 = 20; C5 = 12; V = 30; A = 60

Cálculo de sus magnitudes

Arista "l" del arquimediano

Dato del ejercicio



Radio "m" de la circumferencia circumscrità al prime deterrido al unio los extremos de las enatro aristas de un an-

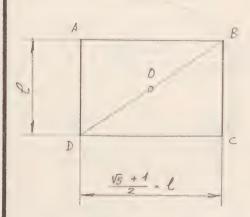


Figura 1

L'B. C.D (fig. 1), uns de cuyo lado es el lado del arquimediano
(lado de las caras triangulares) q
el otro es la diagonal del pentagomo de lado "l" de su cara contiqua.

El valor de la diagonal des jentagono aequilar, en funcion de su lado, se demnestra en Geometria es

$$DC = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \ell$$

El Radio pedido será la semidiagonal OD de dicho rectangulo. Lu valor será pues

$$0D = m = \frac{1}{2} \sqrt{\ell^2 + (\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \ell)^2} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}} \ell = 0,95 \text{ 10 } 56 \text{ 51...} \ell$$

Dennetto del -late atras



Walis 'à de la sefera curan cità

este caro particular.

$$\boxed{q} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - m^2}} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - (\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\ell)^2}} = \frac{\ell}{2\sqrt{1 - \frac{5+\sqrt{5}}{8}}} = \frac{\ell}{2\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}} = \frac{\ell}{2\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}}{\frac{3-\sqrt{5}}{4}} \ell = \frac{4\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}}{3-\sqrt{5}} \ell = \frac{4\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}} \times (3+\sqrt{5})}{4} \ell = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^2}{8}} \ell = \frac{4\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}} \times (3+\sqrt{5})}{8} \ell = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^2}{8}} \ell = \frac{4\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}} \times (3+\sqrt{5})}{8} \ell = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^2}{8}} \ell = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^2}{8}} \ell = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^2}{8}} \ell = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^2}{8}} \ell = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^2}{8}} \ell = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^2}{8}} \ell = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{8}} \ell = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{8}} \ell = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{8}} \ell = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{8}} \ell = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5}$$

$$=\sqrt{\frac{4(3+\sqrt{5})}{8}}\ell=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\ell=\frac{\sqrt{\frac{5}{3}+\sqrt{\frac{1}{5}}}}{\sqrt{2}}\ell=\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}\ell=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\ell=\frac{\sqrt{5}+1}{$$

Padro "b" de la estera tangente a las aristos.

la mil a la desperi de una como per

Aplicando la formula general [3] (ver lan. 33), tendremos:

$$|b| = \sqrt{a^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{3+15}{2}}\ell\right)^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{4}} \cdot \ell = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}-4}{4}} \ell = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}-4}{$$

$$= \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{4}} l = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{2}} l = 1.53 88 41 76... l$$

Partio "d3" de la circumferencia circumscrita a una cara triangular de lado l

Le demuestra en Geometria, es

$$d_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \ell = 0, 57 73 50 27...\ell$$



pentagonal.

Le demnestra en Georgetria es

$$d_{5} = \sqrt{\frac{5}{10}} = 0.35 \times 508...4$$

Radio "ez" de la experte a les caras trianque-

Aplicando la l'ormula general [2] (ver lam. 33), tendremos:

$$C_3 = \sqrt{a^2 - (d_3)^2} = \sqrt{(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \ell)^2 - (\frac{\sqrt{3}}{3} \ell)} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1}{3}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{9+3\sqrt{5}-2}{6}} \ell = \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}} \ell = \frac{\sqrt{\frac{9}{2}}+\sqrt{\frac{5}{2}}}{\sqrt{6}} \ell = \frac{\sqrt{\frac{9}{2}}+\sqrt{\frac{5}{2}}}{\sqrt{6}} \ell = (\sqrt{\frac{9}{12}}+\sqrt{\frac{5}{12}}) \cdot \ell = \sqrt{\frac{9}{12}} \cdot \sqrt{\frac{1}{12}} \cdot \sqrt{\frac{1}{12}} \cdot \ell = \sqrt{\frac{9}{12}} \cdot \sqrt{\frac{1}{12}} \cdot \sqrt{\frac{1}{12}} \cdot \sqrt{\frac{1}{12}} \cdot \ell = \sqrt{\frac{9}{12}} \cdot \sqrt{\frac{1}{12}} \cdot \sqrt{\frac{1}{12}}$$

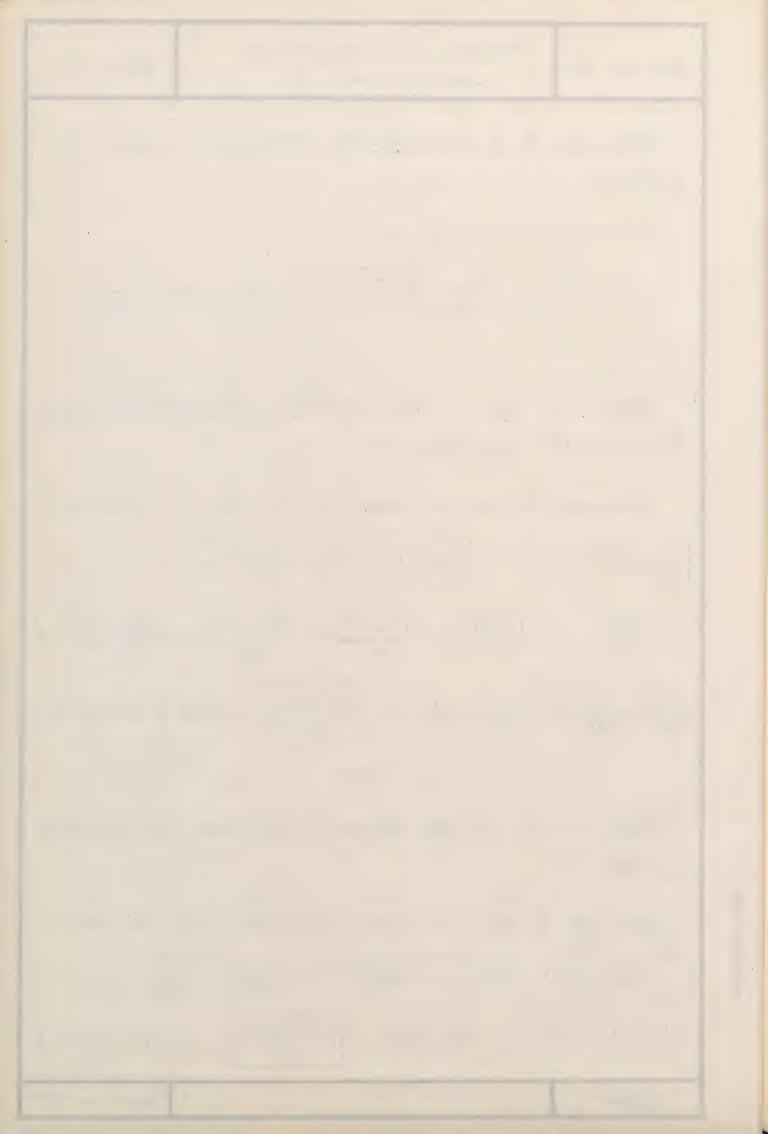
$$= \left(\frac{3}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\right) \ell = \left(\frac{3\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{15}}{6}\right) \ell = \left(\frac{3\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{15}}{6}\right) \ell = 1,51 + 15 + 22 + 63 + \dots \ell$$

Radio "C5" de la essera tangente a las caras pentagonales de lado "l"

Aplicando la formula general [2] (ver lam. 33), tendremos:

$$C_5 = \sqrt{a^2 - (d_5)^2} = \sqrt{\left(\frac{V_5 + 1}{2}\ell\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{5 + V_5}{10}}\ell\right)^2} = \sqrt{\frac{3 + V_5}{2} - \frac{5 + V_5}{10}} =$$

$$=\sqrt{\frac{15+5\sqrt{5}-5-\sqrt{5}}{10}}-\ell=\sqrt{\frac{10+4\sqrt{5}}{10}}\ell=\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\ell=1.3763819...\ell$$



Angula dedilines "3" del diadro tomado por uma men triangular, con el plan diametres del arminediano que pasa pa una axista de aquella.

de determine, ou función de un tou quete. por la former la general [5] (ver lance. 33)

$$\frac{1}{\sqrt{4}} |\alpha_3| = \frac{2c_3}{\sqrt{4(d_2)^2 - \rho^2}} = \frac{2 \sqrt{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}}{\sqrt{4 \times \left(\frac{\sqrt{13}}{3} \ell\right)^2 - \rho^2}} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{3\sqrt{4 \times \frac{1}{3} - 1}}$$

$$= \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{3\sqrt{\frac{4}{3}}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{9 + \sqrt{45}}{3} = \frac{9 + 3\sqrt{5}}{3} = \frac{3 + \sqrt{5}}{3} = \frac{5}{3} = \frac{23}{60} = \frac{67}{98} = \frac{9}{10}$$

ly to d3 = 0.719 00 52

×3 = 79° 11' 15,7"

Ingulo rectilines " « 5" del diedo formado por sua " pentagonal, con el plano diametral del assuradano en the in a wint of aguilla.

Le determina, en suncion de la travente por la firme.

la general [6] (ver lam. 23).

$$\frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{2 C_5}{\sqrt{4} (d_5)^2 - L^2} = \frac{2\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}}{\sqrt{4(\sqrt{\frac{5}{10}} + \sqrt{\frac{10}{10}} + 2)^2 - L^2}} = \frac{2\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}}{\sqrt{4 \times \frac{5 + \sqrt{5}}{10} - 1}} = \frac{2\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}}{\sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{5} - 1}}$$

$$= \frac{2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}}{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}} = 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} = 2$$

to to 0 = 1 = 0,30 10 30 0

d= 630 26' 5,8"



Inquit mellino 93.5 del diretto formado por una cara tarançados por una cara tarançados o que o pentagaren regulares.

 $\frac{\sqrt{9}}{3-5} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times$

COMPROBACION

$$t_{3-5} = t_{7} (x_{3} + x_{5}) = \frac{t_{7} x_{3} + t_{7} x_{5}}{1 - t_{7} x_{3} t_{7} x_{5}} = \frac{(3 + \sqrt{5}) + 2}{1 - (3 + \sqrt{5}) \times 2} = \frac{t_{7} x_{3} + t_{7} x_{5}}{1 - (3 + \sqrt{5}) \times 2} = \frac{t_{7} x_{3} + t_{7} x_{5}}{1 - (3 + \sqrt{5}) \times 2} = \frac{t_{7} x_{3} + t_{7} x_{5}}{1 - (3 + \sqrt{5}) \times 2} = \frac{t_{7} x_{3} + t_{7} x_{5}}{1 - (3 + \sqrt{5}) \times 2} = \frac{t_{7} x_{3} + t_{7} x_{5}}{1 - (3 + \sqrt{5}) \times 2} = \frac{t_{7} x_{3} + t_{7} x_{5}}{1 - (3 + \sqrt{5}) \times 2} = \frac{t_{7} x_{5}$$

$$= \frac{5 + \sqrt{5}}{1 - 6 - 2\sqrt{5}} = \frac{5 + \sqrt{5}}{-5 - 2\sqrt{5}} = \frac{5 + \sqrt{5}}{5 + 2\sqrt{5}} = \frac{(5 + \sqrt{5})(5 - 2\sqrt{5})}{5} = \frac{5 + \sqrt{5}}{5}$$

$$= -\frac{25 + 5\sqrt{5} - 10\sqrt{5} - 10}{5} = -\frac{15 - 5\sqrt{5}}{5} = -\left(3 - \sqrt{5}\right) = -0,76393202.$$

Area lateral "S" del arquimediano

Je compone de la suma de 20 caras triangulares y 12 careas pentagonales, ambas regulares q de lado "l"; la su-

UNE A4 210 X 2

23 - 2 - 73



perficie ma:

$$S = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \ell^2 + 12 \times \frac{\sqrt{35 + 1015}}{4} \ell^2 = \left(5\sqrt{3} + 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}\right) \ell^2 =$$

$$= \left(5.66 \ 0.254 \ 1 + 20, 6457 \ 258\right) \ell^2 = 29, 3059 \ 829 \dots \ell^2$$

Columnen "V" del arquirus diaus

Le compone de la surma de 20 parides de 6 ase trianquelar y altura "C3" y de 12 piramides de base pentagomal regular y celtura "C5"; en valor rera:

$$V = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \ell^{2} \times \frac{C_{5}}{3} + 12 \times \frac{\sqrt{25 + 10 \, \text{VF}}}{4} \ell^{2} \times \frac{C_{5}}{3} = \frac{5 \, \sqrt{3}}{3} \ell^{2} \times \frac{3 \, \sqrt{3} + \sqrt{15}}{6} \ell^{2}$$

$$+ \frac{3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{3} \ell^{2} \times \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} \ell = \left(\frac{5 \times (3\sqrt{3}\sqrt{3} + \sqrt{15}\sqrt{3})}{18} + \frac{1}{18}\right)$$

$$+ \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}} \times \sqrt{\frac{5 + 2 \sqrt{5}}{5}} \ell^{3} = \left(\frac{5 (9 + 3 \sqrt{5})}{18} + \sqrt{\frac{(85 + 10 \sqrt{5})(5 + 2 \sqrt{5})}{5}}\right) \ell^{3} = \frac{1}{5}$$

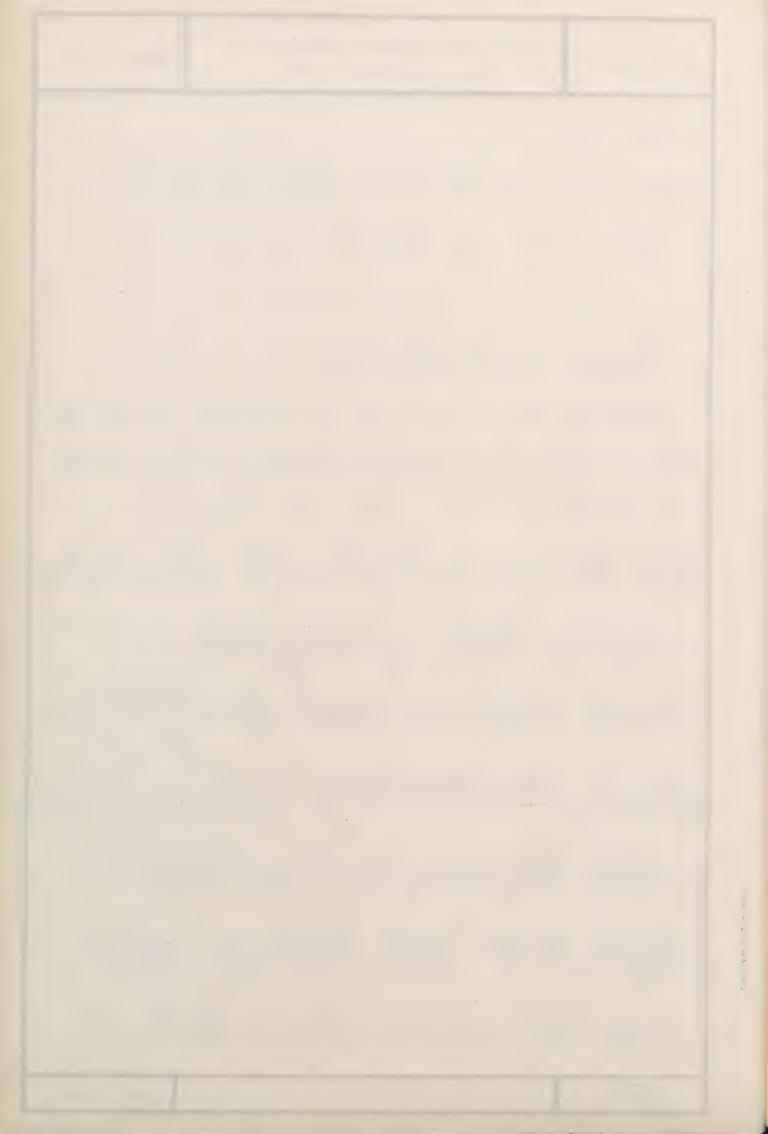
$$= \left(\frac{5(3+\sqrt{5})}{6} + \sqrt{\frac{125+50\sqrt{5}+50\sqrt{5}+100}{5}}\right) \ell^{3} = \left(\frac{5(3+\sqrt{5})}{6} + \sqrt{25+10\sqrt{5}+10\sqrt{5}+20}\right) \ell^{3}$$

$$= \left(\frac{5(3+\sqrt{5})}{6} + \sqrt{45+20\sqrt{5}}\right)\ell^{3} = \left(\frac{5(3+\sqrt{5})}{6} + \sqrt{(9+4\sqrt{5})\times5}\right)\ell^{3} =$$

$$= \left(\frac{5(3+\sqrt{5})}{6} + \sqrt{9+4\sqrt{5}} \times \sqrt{5}\right) \ell^{3} = \left[\frac{5(3+\sqrt{5})}{6} + \sqrt{\frac{10}{2}} + \sqrt{\frac{8}{2}}\right) \sqrt{5}\right] \ell^{3} =$$

$$= \left[\frac{5(3+17)}{6} + (\sqrt{5}+2) \times \sqrt{7} \right] \ell^{3} = \left(\frac{5(3+17)}{6} + 5 + 2\sqrt{7} \right) \ell^{3} =$$

(53



burnina 36

Poliedes arquimediano. IV

06ya - 9

FIGURA CORPOREA

Je obtiene por acoptamiento de 31 mm, a français cantater. 12
pentagonos regulares, de lado 34 mm, a français come en care.
vértice conservaran à tranquete y à monte que en care.

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximada
a	V5 + 1 2	1, 61 80 34 &
Ь	V5 + 2 V5 2	1,53 88 42l
C ₃	3 V3 + V15	1,51 15 23 l
C ₅	V 5 + 5 V5	1, 37 63 82 l
d ₃	<u>√3</u> ℓ	0,57 73 50l
d_5	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \ell$	0.85 06 572
m	V = + V = l	0, 95 10 57 {
o√3	to d3 = 3 + 15	$tg \ll_3 = 5.23 60 68$ $\ll_3 = 79^\circ 11' 15,7''$
d ₅	tg < 5 = 2	∝ ₅ = 63° 26′ 5,8″
Y3-5	43 + 45 49 + 45 49 + 45	$-fg \ \varphi_{3-5} = 0.76 \ 39 \ 32$ $\varphi_{3-5} = 142^{\circ} \ 37' \ 21.5"$
5	(5 V3 + 3 V25 + 10 V5) 2°	29, 30 59 83 l
V	$\frac{45 + 17 \sqrt{5}}{6} \ell^3$	13, 83 55 2613



PROCESO GLÁFICO ANDLÍTICO

Aspués del calculo de la magnitude minispelet demos a proceder en la lamina 36, a la esprendicion profesa del arquimentama IV.

formulas autenisms de ministra que per que de vitas complesas terras cuys vitares especiaremes forter en formulas las colas las magnificades las citardes en formulas des lado las del arquimentano, cuya lancitud a de 34 mm.

Calculant previouente les siennes le consquiteres:

ly: (dats del ejercicio) = 31.0 mm

01 = 1,61 80 36.. × 3/4 = 55,0 mm

D = 1,53 88 42... 34 = 52,3 n.m

C3 = 1.51 15 23 ... x 34 = 51.4 mm

C = 1.37 63 83 ... × 24 = 46.8 mm

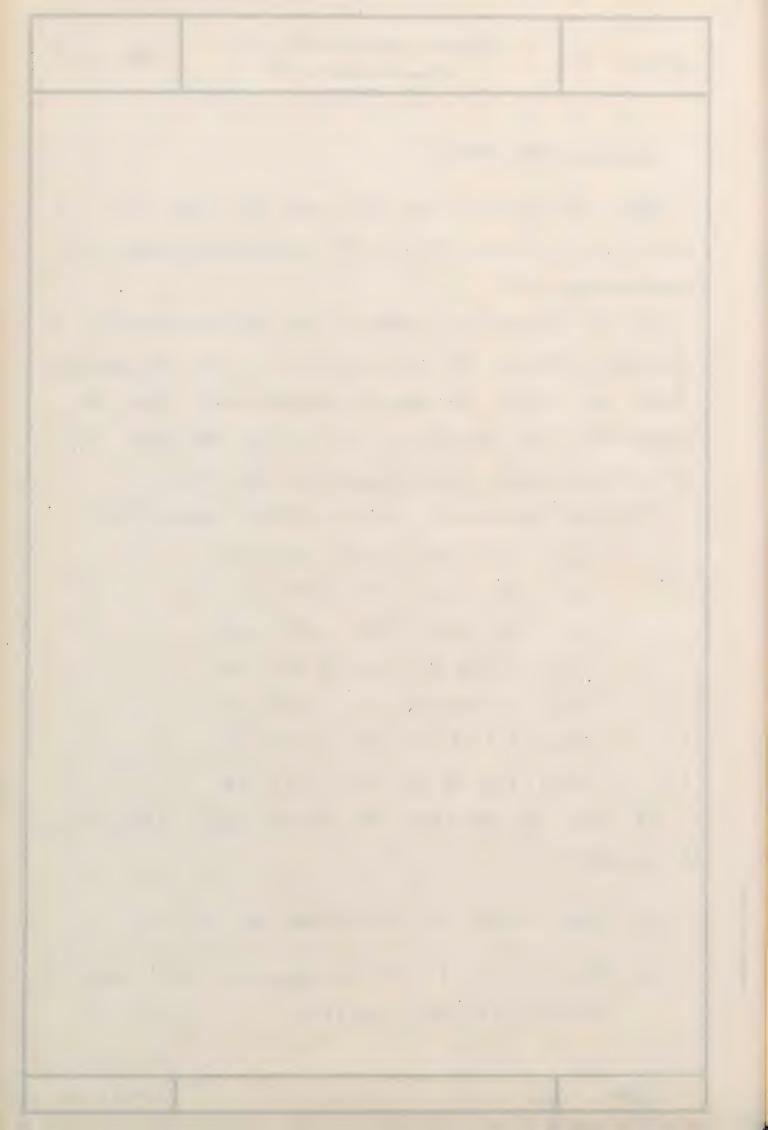
d3 = 0, 57 3 50 ... × 34 = 19,6 mm

dr = 0,85 06 5/--- x 34 = 28.9 mm

el signiente:

1º Lituar el contro 0, de coordenadas 72, 72, 85 mm

2° Dibijan en I, II g III las proyecciones de la esfera :-curscrita, de sadio a - 55 mm



3° (.) permitar en I. I , III. 'a cara pentagonal, su puer.

to el poliedro colocado con dicha cara paralela a II, y un
lado (3-1) perpen licular a I (utilicese la cota "C5" en I ;

III, y la "d5" en II)

L'o Obtener en I, las proyecciones del virtice 9 de ta cara contigna trianquelar de arista 3-1 hasta colocar el veitice 9 sobre la esfera circumscrita. Fara ello se hará centro en en 3, con radio ignal a la altura de la cara 3-4-9 y se trarará un arco que corte en 9, a la esfe a circumscrita.

5° Detoraninar las projecciones en II q III de dicho vértice 9, q requidamente en I, II q III la de la vértices 6, 7, 8 q 10 (dichos vértices son a su vez de un pentagono regular de plano paralelo al II).

5º Determinar en I la posición de los vértices 11 al 20; esto son los de un decásono regular de lado la inserito en una circumferencia de radio "a"; los vértices 11 g 16 estan sobre el eje paralelo al "Y".

 Ξ l'attendre las projecciones de los anteriores oértices 11 al 20, nobre I, II; el plano que los contiene es parale-lo a II.

2º Obtence las projecciones en II de la restante réctices 21 al 31, sabiendo que con simétricos con respecto a un eje paralelo a Y, que pasa por O. Los m² 21, 22, 23, 24,



UNE A4 210 X 29

25, 86, 27, 21, 29, 30 Ar correspondence respected and in the second of allower of the second of the

James comp dans , messages ayuda para el travado qui fico dado anteriormente, vamos a determinar analitiva mente las signientes magnitudes complementarias que darán mayor exactitud a dicho travado / ver lam. 35.

Altura "n" de una cara treangular

de demuestra un journitie es

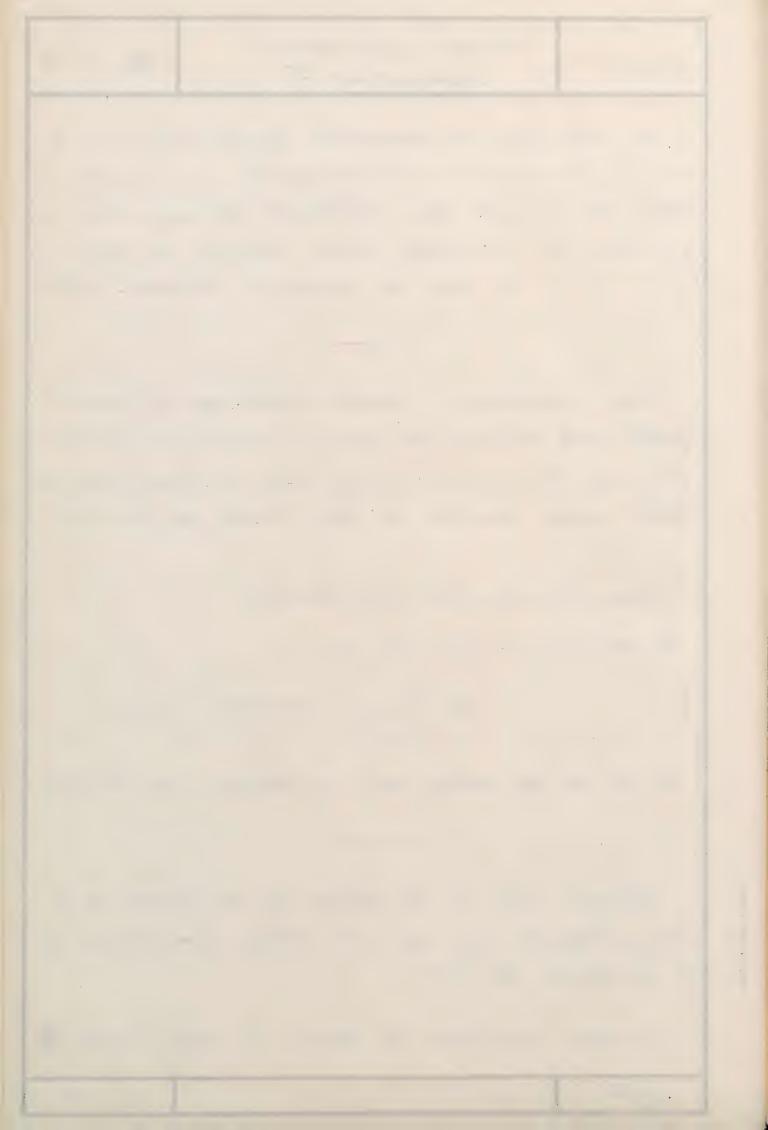
$$n = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.86 \in 0.25 \text{ A...}$$

Para el caso del diberjo, sera: n: 0.85 50 35 4 34 = 29. 4 mm.

Listancia "g" de los réstices s'el 10 al plans de la cara pentaganai 1 al 5, q de los vértices 21 al 25 a la cara pentagonal 26 al 30

Le Etiene projectantes la altura "n" sitre el plano II;

· El



UNE A4 210 X 297

el arquelo de proposeción es de

93-5 - 70° = 135° 37' 21,5" - 90° = 52° 37' 21,5"

 $g = n \cdot cos 50^{\circ} 37' 21.5'' = \frac{\sqrt{3}}{2} \times cos 50^{\circ} 37' 21.5'' \times 1 =$

= 0, 52 57 3/ 10 ... × 8

Desarrollo del calculo anterior:

 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}$

+ ly cos 52° 37' 31,5" = = 1, 783 23 30

0, 021 79 37

- lg 2 = ___ = 0.301 03 00

ly 0. 52 57 31 10___ = 1,720 76 37

Para el sus del dibuis, cera: 9 = 0.58 57 31 10.. × 34 = 17,9 mm

Distancia of entre los des plans paraleles a II, que contienen los vértices 6 al 10 g 21 al 25 respectivamente

Le obtien por diferencia de las alturas "C5" y "g", ya calculadas.

 $f = 2 (C_5 - g) = 2 \times (1.37 63 81 9 - 0.52 57 31 1) l = 1,70 13.01 6... l$

Para el easo del dibujo, cerà: f = 1.70 13 01 6 x 34 = 57.8



Radio "r" de la circumforencia cincumsonit al penhagono regular de miter 6 al 10 g 21 al 25.

sa " a " g cate to " & ". Lu valor una:

 $\Gamma = \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{(1.61\ 80\ 34\ 0)^2 - (0.85\ 06\ 50\ 8)^2} = 1.37\ 63\ 81\ 9...\ \ell$ Fina il ano del diferio. $\Gamma = 46.8$ m.m.

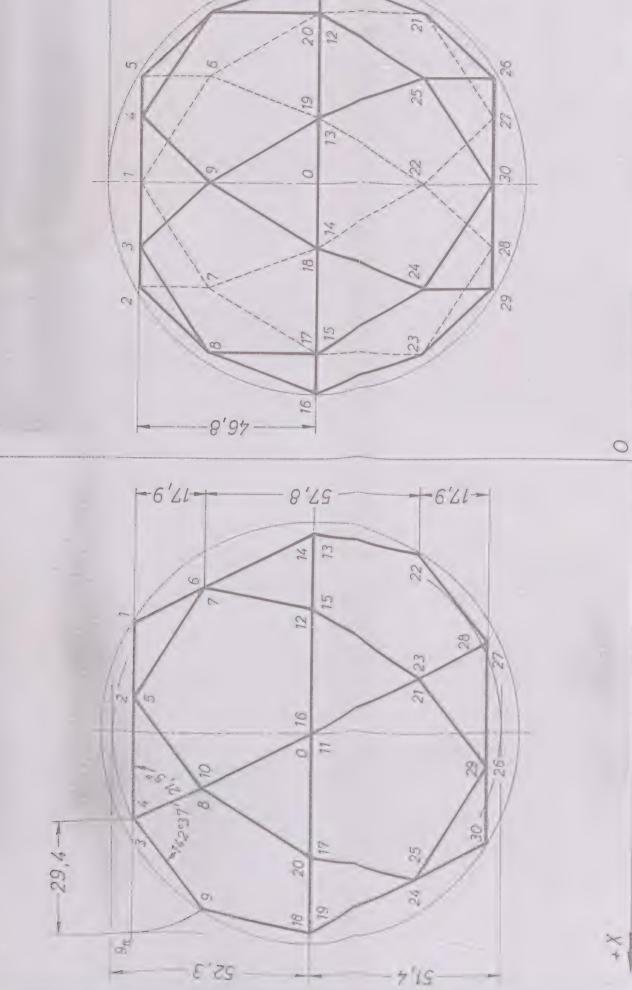
I continuación describes. In waters autoria.

CUADRO SINÓPTICO DE LAS MAGNITUDES COMPLEMENTARIAS

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
n	√3 2 ℓ	0, 86 60 25 l
9	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ cos 52° 37′ 21,5″	0, 52 57 31 f
f	2 (C ₅ - g)	1. 70 13 02 6
r	$\sqrt{a^2-\left(\frac{f}{2}\right)^2}$	1, 37 63 82 8



Z+



0'99

ARQUIMEDIANO IV

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el Arquimediano IV, en el que en cada vértice concurren dos triángulos equi-láteros y dos pentágonos regulares.

La longitud de su lado es de 34 milímetros y las coordenadas de su centro 0 son: 0 (72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

1+

AI	Arquimediano	ime	Argu			Escala 1.1
Curso						Humno:
Escuela	(firma)	cación				Fecha:
10000		Califi-	Entregada	Propuesta De entrega Entregada	Propuesta	

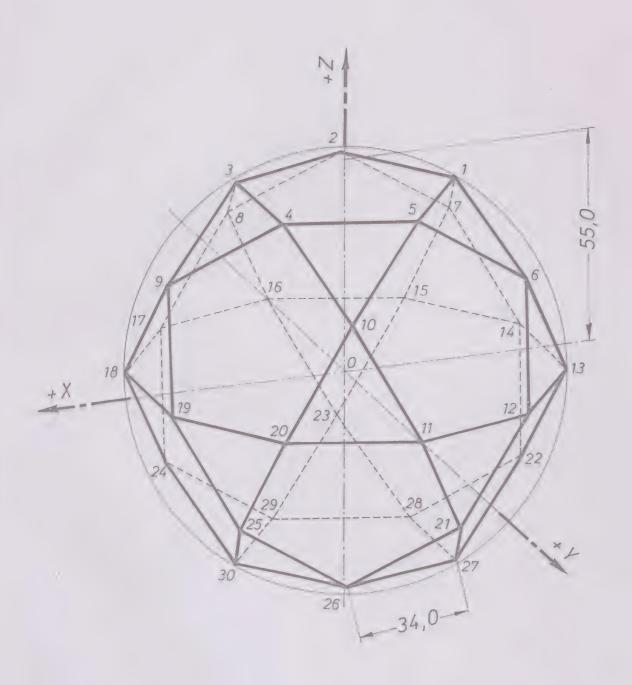
11

Lámina 36

Lar

Curso 19 - 19







37

FNUMCIZOD

Proposition por el mitodo quálico- analítico, en la plane I, II a III, el Arquina desars V en el que en esta ventes concuercan ters suadrados, a un transperlo conitatero

Le constat de su contra D, con D 42, 42, 15 mm.
Silujar en formato DSV 1 a 1516/2 111.

0 (72.72 25) ...

UNE A4 210 X 297



CONSIDERACIONES JREVIAS

Seguiremos en el estudio de este arquimediano, las directrices o formulas generales planteadas en el estudio del "Arquimediano I", lamina 33.

En el caso particular que mos ocupa, determinaremos las magaitudes signientes:

l: Arista del arguimediano V (dato del ejercicio).

a = Radio de la esfera circumscrita.

b: Radio de la esfera tangente a las aristas.

C3 = Radio de la esfera tangente a las caras triangulares.

C, : Radio de la esfera tangente a las caras madrades.

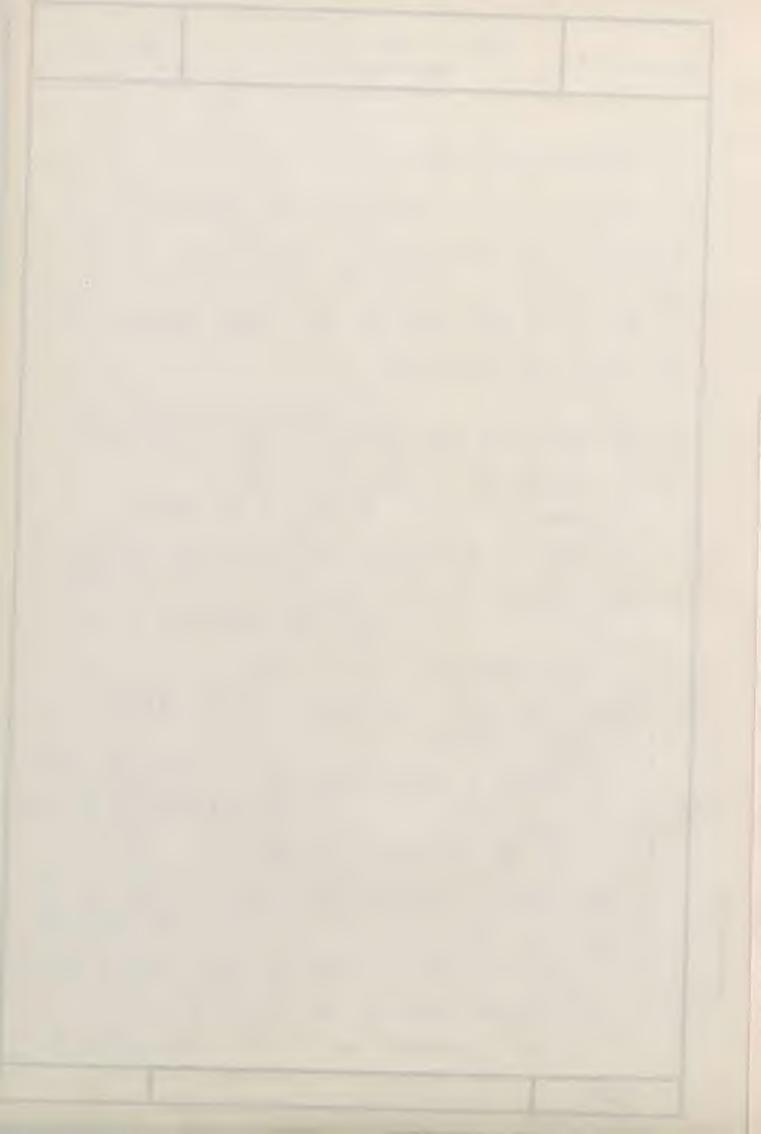
d3 = Radio de la circumferencia circumscrità a una cana triangular.

di = Radio de la circumferencia circumscrita a una cana cuadrada.

m = Radio de la circumferencia circumscrita al poligono obtenido al unior los extremios de las aristas de un ángulo solido.

cara madrada, con el plano diametral del ar-

10 - 3 - 70



quimedians que pasa por una arista de aquella.

13-4 = Angulo rectilines del diedro formado por mue cara triangula y otra cuadrada.

13.4 = Angulo cectilines del diedro foramado por dos caras cuadradas.

S = Luperficie

V = Volumen

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

El estudio realizado de este arquimediano, nos indica que se compone de 8 caras trianquelares regulares y de 18 caras cuadradas; 24 vértices y 48 aristas.

En cada vértice concurren 3 cuadrados quen Trianquelo equilatero, todos de lados "l" ignales; por consigniente concurariran tambien 4 aristas del arquimediano,

Ari pues, tendremos que

ARQUIMEDIANO V (1 P3 + 3 P4); C3=8; C4=18; V=24; A=48

Cálculo de sus magnitudes

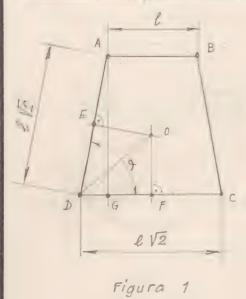
Arista "l' del arquimediano

Dato del ejercicio





Radio m de la sincumparacia encueranta ai pileque stando al unive in contrar de les cuatra aristas
de un angula sólido.



iste princes a mi apecio

isosceles A. E. C. I. (fee. I), anya éa
se menor AB es el cado "i" ael

arquimediano (lest. de la cara

triangular) y la stor, tree lados

AD, DC 2 CD, to des remeles

and diagonales de las tree ca

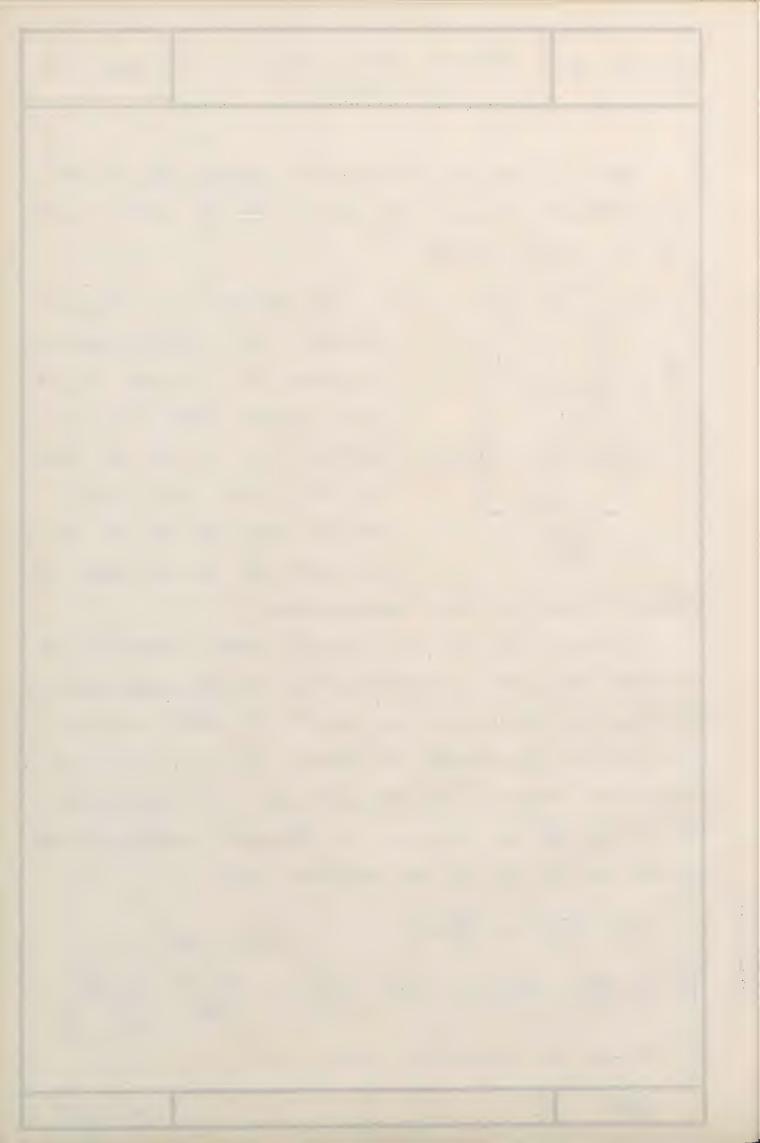
anquelo solido de dicho arquimediano.

Li trazamos por E g F, puntos medios cos pectivos de los lados AD g DC, perpendiculares a estos, dichas perpendiculares a estos, dichas perpendiculares se contarán en un punto O, centro de la circumferencia circumserita al trapecio A.B.C.D., g de radio OD = m. Erasando reguidamente por A, la perpendicular a C. es mis formarci el trianquelo restruçués ADG, cecto en G; en este re verificará que

$$DG = \frac{DC - AB}{2} = \frac{l \sqrt{2} - l}{2}$$
 y también que

$$|C| = \frac{DG}{AD} = \frac{\ell \sqrt{2} - \ell}{2} : \ell \sqrt{2} = \frac{\ell \sqrt{2} - \ell}{2\sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

7 interes, por tai momentais, que



$$a_{1} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \left(2\pi + \frac{1}{2}\right)\right)} \qquad \text{or } \text{vertices}$$

$$(c: \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + cos z)} = \sqrt{\frac{1}{2}(c + \frac{z - \sqrt{z}}{4})} = \sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{4 + 2 - \sqrt{z}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6 - \sqrt{2}}{2}}$$

There in to it seems, good OD = ED y timelemente

$$m = \frac{\ell \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{6 - \sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{6 - \sqrt{2}}{2}}} \ell = \sqrt{\frac{2}{6 - \sqrt{2}}} \ell = \sqrt{\frac{4}{6 - \sqrt{2}}} \ell = \sqrt{\frac{6 - \sqrt{2}}{2}}$$

$$= 2 \sqrt[4]{\frac{6+\sqrt{2}}{34}} \ell = 0, 93 39 48 83 \dots \ell$$

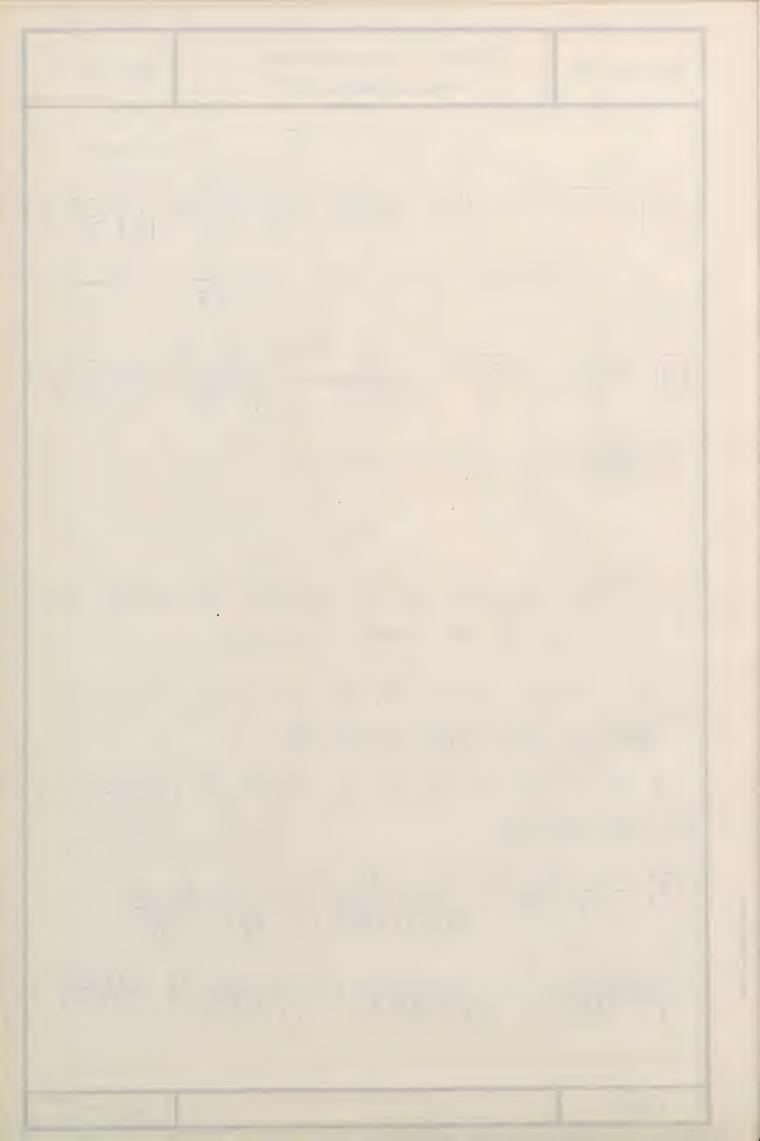
(Véau al final de este estudio, otro proceso para la determinación del radio " ")

Padro "a" de la esfera circumscrita

Le obtiene aplicando la formula general [1] (ver lan. 33), a este caso particular

$$a = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - m^2}} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - (2\sqrt{\frac{6 + \sqrt{2}}{34}}\ell)^2}} = \frac{\ell}{2\sqrt{1 - 4 \times \frac{6 + \sqrt{2}}{34}}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{12 + 2\sqrt{2}}{17}}} \ell = \frac{1}{2\sqrt{\frac{17 - 12 - 2\sqrt{2}}{17}}} \ell = \frac{1}{2\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{2}}{17}}} \ell = \frac{1}{2\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{2}}{17}}} \ell$$



UNE A4 210 X 29

 $= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{17 (5 + 2\sqrt{5})}{17}} l = \frac{1}{2} \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} l = 1,39 89 66 33 \dots l$ |L = 39,315 mm|

Radio "b" de la espera tanquet a les istas.

Aprirancis la ismula general [3] (ver lam. 33), tendremos:

$$b = \sqrt{a^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + 2\sqrt{2} \times \ell\right)^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\frac{5 + 5\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{4}} \times \ell =$$

$$=\sqrt{\frac{4+8\sqrt{2}}{4}} \ell = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} \ell = 1, 30 65 62 96 - - \ell$$

(dibujo: b = 51,3 mm)

Radio "d3" de la circumferencia circumsorità a una cara triangular de la do "l"

Le demuestra en geometria, es

$$d_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \ell = 0.57735027...\ell$$

(disyo: da = 22,7 mm)

Radio "du" de la circumferencia circumscrita a una

cara cuadrada.

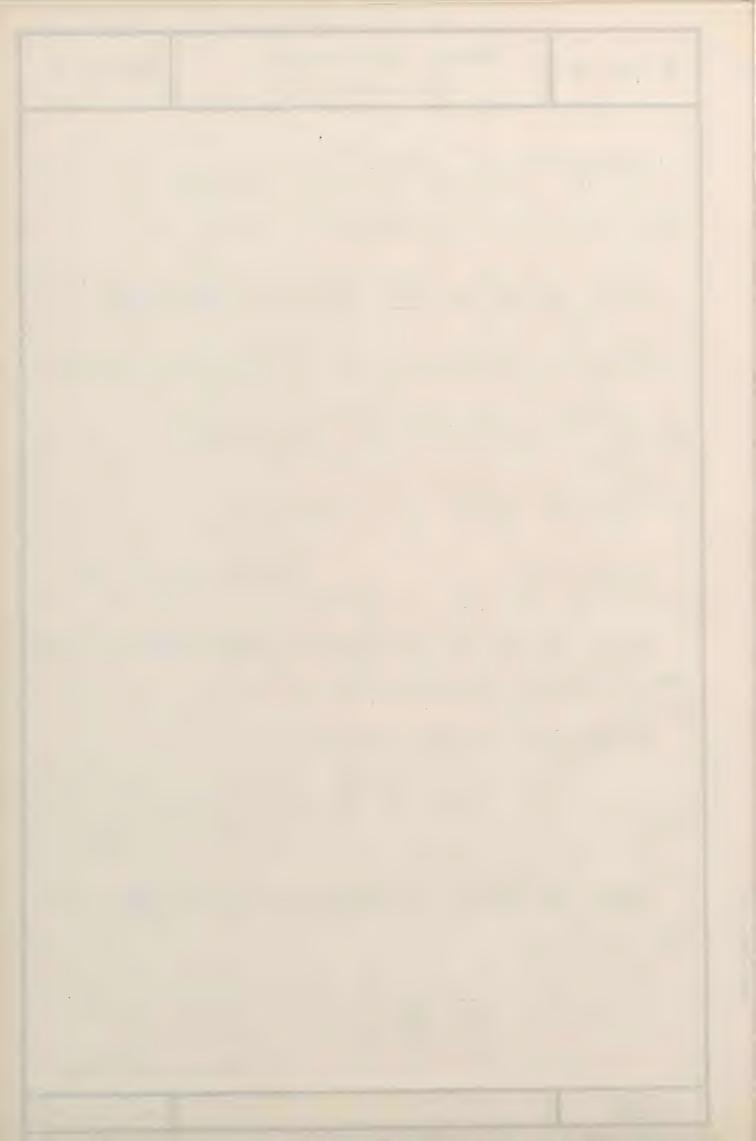
Le demmestra en geometria, es

$$d_{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ell = 0.70710678...\ell$$

(ou disup du = 27. 8 mm)

60

12 - 3 - 73



Catio "c, de la esfera tonqueta a las como trionquela-

Aplicando la férenula general [2] (ver line. 33) tenedas

(heja!

$$|C_3| = \sqrt{a^2 - (d_3)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + 2\sqrt{2}\ell\right)^2 - \left(\frac{13}{3}\ell\right)^2} = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{3} \cdot \ell} = \frac{\sqrt{15 + 6\sqrt{2} - 4}}{12} \cdot \ell = \sqrt{\frac{11 + 6\sqrt{2}}{12}} \cdot \ell = \sqrt{\frac{11 + 6\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}} \cdot \ell = \sqrt{\frac{11 + 6\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}} \cdot \ell = \sqrt{\frac{12}{3} \cdot \ell} \cdot \ell = \sqrt{\frac{12}{3}$$

$$= \frac{3 + \sqrt{2}}{2\sqrt{3}} l = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{6}}{6} l = 1, 27, 42, 73, 69 l$$
(en dibujo: $C_3 = 50.1 \text{ mm}$)

Radio "c" de la esfera tangente a las caras enadradas de lado "l"

Aplicando la formula general [2] (ver lan. 33). tendrenero:

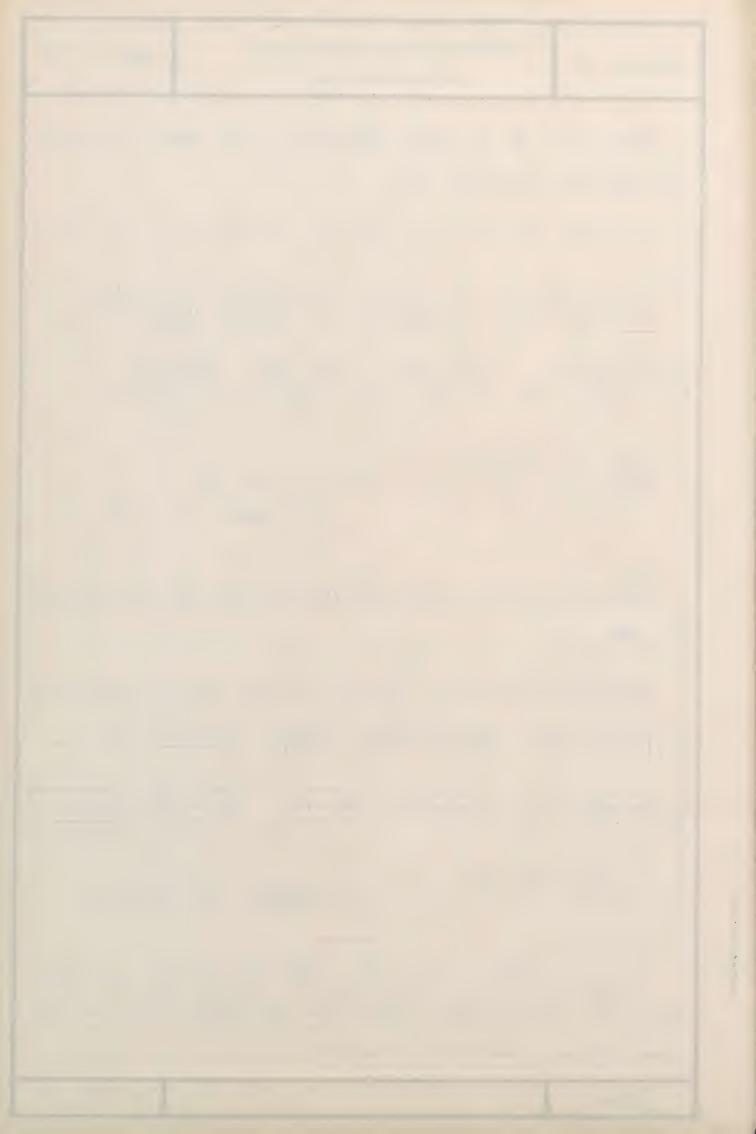
$$C_4 = \sqrt{a^2 - (d_4)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}\ell\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\right)^2} = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2}} \times \ell =$$

$$-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{2}-2}{4}} \cdot l = \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{4}} \cdot l = \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{2} \cdot l = \frac{\sqrt{\frac{4}{2}} + \sqrt{\frac{2}{2}}}{2} \cdot l = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \cdot l$$

= 1,20 71 06 78 --- &

(en dibujo: Cy = 47.5 mm)

Angulo alctilineo "x3" del diedro formado por una cara trianquiar, con el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquella.



general [5] four time, El.

$$\frac{f_{0}}{f_{0}} \propto_{3} = \frac{3C_{3}}{\sqrt{4(4_{2})^{2} - \ell^{2}}} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{6}}{\sqrt{4(\frac{\sqrt{3}}{3}\ell)^{2} - \ell^{2}}} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{6}}{3\sqrt{4 \times \frac{1}{3}} - 1} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{6}}{3\sqrt{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{(3\sqrt{3} + \sqrt{6}) \times \sqrt{\frac{4}{2}}}{3 \times \frac{1}{3}} = \frac{3\sqrt{3} \times \frac{1}{3} + \sqrt{6} \times \frac{1}{3}}{1} = \frac{3 + \sqrt{2}}{3 + \sqrt{4}} = \frac{41}{3} \times \frac{41}{3} \times \frac{42}{3} = \frac{13}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{13}{3} \times \frac{13}{3} = \frac{13}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{13}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{13}{3} \times \frac{13}{3} = \frac{13}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{13}{3} \times \frac{13}{3} = \frac{13}{3}$$

ra cuadrada, un el plano diametral del arquimediano que pasa por una arista de aquella.

Je determina, en función de on tangente. pre la 16onnela general [6] (ver lam, 33).

$$\frac{1}{\sqrt{4}(d_4)^2 - \ell^2} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{2} + 1}{2} \ell}{\sqrt{4(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell)^2 - \ell^2}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{4 \times \frac{1}{2} - 1}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{4 \times \frac{1}{2} - 1}}$$

= 2,41 42 13 56 ...

4 to d4 = 0,382 77 57

La triangular aegular y ma cuadrada

-52

11: - 3 - 75



The Nº F

Splicando la fermala que al las par lan. 331, tonde mets:

largulo rectilines " 4.4 del diedo lemado por dos co-

Aplicando la formula general [4] (ver lan. 33), tendremos:

$$|\psi_{4-4}| = 2 \times_4 = 2 \times 67^{\circ} 30' = 135^{\circ}$$

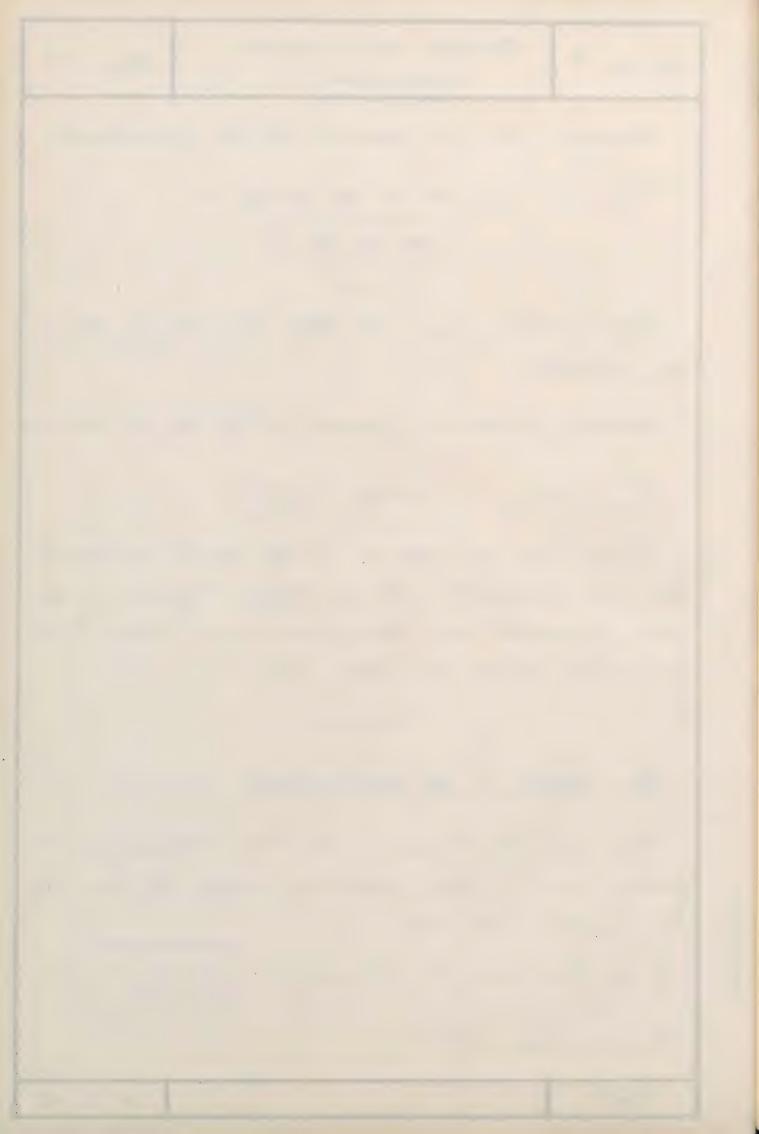
Observere que este valor es el del angulo que forman de la lada consecutivo de un ortigue requela,; en efecto, la prospección del arquimediano, en el plano II, es un octógono regular de lado "l".

Area lateral "S" des arquirusdians

le compone de la suma de 8 caras trianquelares requelares q de 18 caras enadradas, ambas de lado "l";
la superficie será pues:

$$S = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \ell^2 + 18 \ell^2 = (2\sqrt{3} + 18) \ell^2 = 2(\sqrt{3} + 9) \ell^2 =$$

= 21, 46 41 C1 62 -.. l2



Volumen "V" del arquimediano

Le composer de la mener de 8 peramides de base cua trionquées qua altura "C3" y de 18 piramides de base cua drada 1 altura "C4"; su valor rerà:

$$V = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \ell^2 \times \frac{c_3}{3} + 18 \times \ell^2 \times \frac{c_4}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{6}}{6} \ell^3 + 6 \times \frac{\sqrt{2} + 1}{2} \ell^3 =$$

$$= \left(\frac{18 + 2\sqrt{18}}{18} + 3(\sqrt{2} + 1) \right) \ell^3 = \left(\frac{3 + \sqrt{2}}{3} + \left(3\sqrt{2} + 3 \right) \right) \ell^3 = \frac{3 + \sqrt{2} + 9\sqrt{2} + 9}{3} \ell^3 = \frac{3 + \sqrt{2} + 9\sqrt{2} + 9}{3} \ell^3 = \frac{3 + \sqrt{2} + 9\sqrt{2} + 9}{3} \ell^3 = \frac{3 + \sqrt{2} + 9\sqrt{2} + 9}{3} \ell^3 = \frac{3 + \sqrt{2} + 9\sqrt{2} + 9\sqrt{2} + 9}{3} \ell^3 = \frac{3 + \sqrt{2} + 9\sqrt{2} + 9\sqrt{2} + 9}{3} \ell^3 = \frac{3 + \sqrt{2} + 9\sqrt{2} + 9\sqrt{2}$$

$$= \frac{12 + 10 \sqrt{2}}{3} \ell^{3} = 8.71 \pm 40 \pm 45 \pm 21 - ... \ell^{3}$$

FIGURA CORPÓREA

Le obtience por acoplamiento de 8 triangulos escuia. teros de lado 39,3 mm. y de 18 cuadrados de igual lado, de forma que en cada mértice concurran 3 en adrados y 1 triangulo.

cesumines los resultados analíticos colenidos anterior-



CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	1/5+21/2 l	1.398966
Ь	$\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$ ℓ	1. 30 65 632
C ₃	3 V3 + V6 e	1. 27 42 74 {
C4	1 + VZ {	1. 20 7/ 07 2
d_3	<u>√3</u> ℓ	0, 57 73 502
d ₄	V2 2	0. 70 7/ 07 l
m	$2\sqrt{\frac{6+\sqrt{2}}{34}}\ell$	0. 93 39 49 l
	tg ×3 = 3 + V2	tg \alpha_3 = 4. 41 42 14 \alpha_3 = 77° 14' 6.2''
× 4	$tg \propto_4 = 1 + \sqrt{2}$	ty ~4 = 2. 21 42 14 ~4 = 67° 30°
43-4	03 + 04	43-4 = 146° 44' 8,2"
44-4	2 ×4	4-4 = 1350
5	2 (V3 + 9) l ²	21, 16 41 02 {2
V	12 + 10 VZ p3	8, 71 LO 15 l ³

PROCESO GRÁFICO- ANALÍTICO

Después del cálculo de las magnitudes principales, Namos a proceder en la lámina 37, a la representación gráfica del Arquimediano V.

Para su trasado mos valden es de estas calculadas por las formulas antexiores y de procesos quarticos.

(30)

16 - 3 - 73



Calculous primente las siquientes conquitades:

ly = Late is exercicio = 39,3 mm

a = 1,39 89 66.. - 39.2 = 55.0 " -

b = 1,30 65 62 ... × 39.3 = 51.3 m m

C3 = 1. 27 42 70 - 2 39 3 = 50,1 mm.

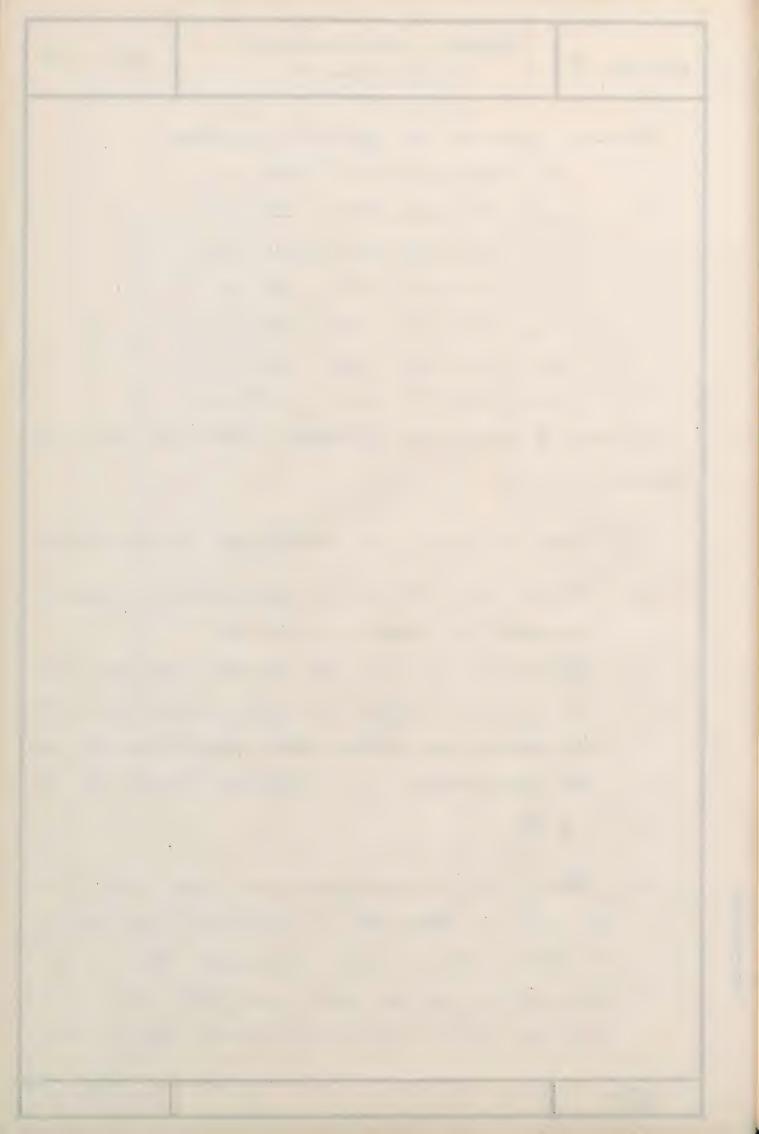
C4 = 1. 20 41 04 ... x 39.3 = 47.5 mm

dz = 0,57 73 50 .. x 22.3 v 22.7 mm

de = 0,70 7/ 07... × 39.3 = 27.8 mm

il nom de operaciones del trasado gráfico (lam. 37), es el signicule:

- 1º Liluar el centro 0, de coordenadas 0/72,72,85) mm.
- 2: Dibujar en I. II q III las proyecciones de la esfera circumscrita, de radio a = 55,0 mm.
- Representar en I. II y III las cara cuadradas surperreior 1 al 4, e inferior 21 al 24, au puesto el policdre colocado con dichas caras paralelas a II, y un
 lado perpendicular a I (utilicese la cota "C" en
 I y III).
- 4° Obtener en I les projecciones del vértice 6 de la caca contigua triangular, de arista 2-3, hasta colo car
 el vértice 6 astre la enfera circumscrita. Para ello se
 hará centro en 3, con nadio ignal a la altura "n"
 de la cara 6.2-3 (dibrijese previamente en II), se



travara un a co que coste en 6, a la espera circularente

- 5: Repière la operacion auterior para les vértices 5, 19, 20; oblingare requidermente les properciones de la cuatre vértices auteriores, exbre II g III.
- La determinación de los certantes vértices del poliedro, en I, I q II, es immediata y mo mecesita explicación.

 Obrevere que el contorno aparente de la proyección II, es un octogono regular de lado "l", y que las proyección y ecciones del poliedro en I q II, con ignales, ann cuando no sea coincidente la muneración de vérticas on ambas.

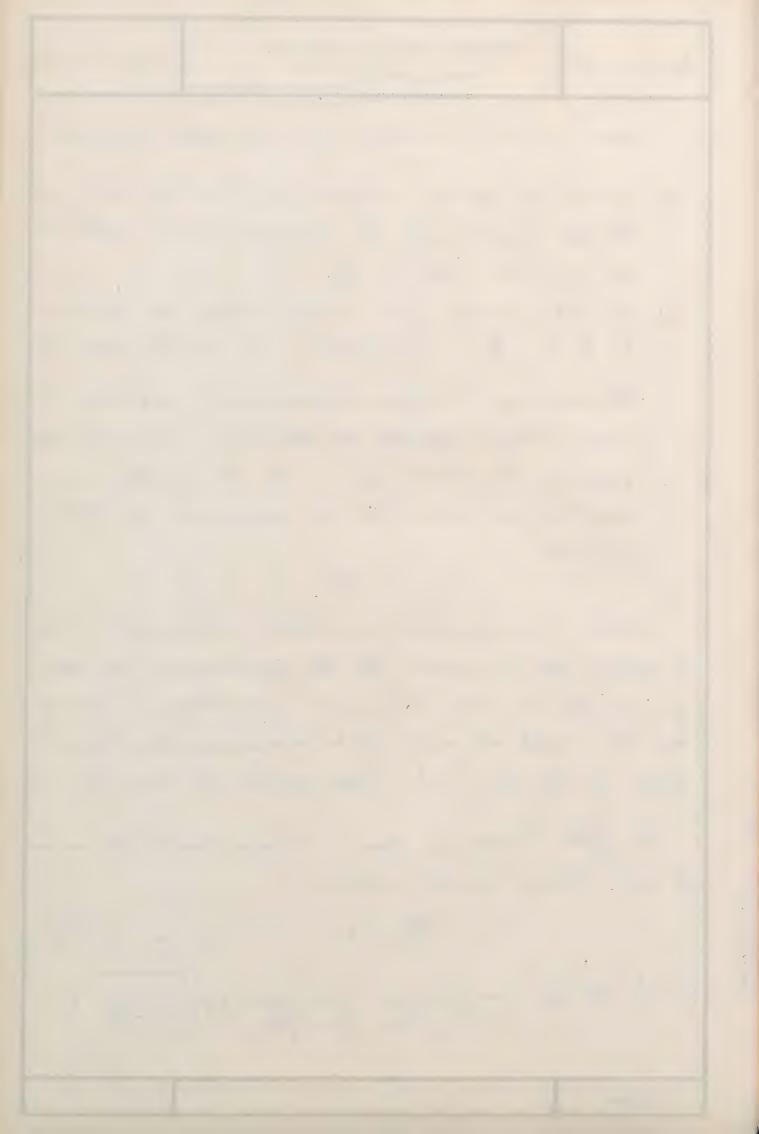
Débido a la propiedad emmediade anteriorment. Le ser el contormo de la projección III del asquimediano, un ostógono regular de lado "l", puede comprehense el cálculo de "b", igual al radio de la circumferencia circumo.

crita, o el de "C", igual al de la inseria.

do del octógono regular, valdrá:

$$\alpha_0 = \frac{360}{8} = 450$$
 2 per la tanto

$$\boxed{b} = \frac{\ell}{2} : \text{ seu } \frac{\alpha_0}{2} = \frac{\ell}{2 \sqrt{\frac{1 - \alpha_0 \alpha_0}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4 \times \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}} \ell = \sqrt{\frac{1}{2 \times \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}} \ell = \frac{1}{2 \times \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \ell = \frac{1}{2 \times \left(1 - \frac{\sqrt{2$$



$$= \sqrt{\frac{1}{2 \times \frac{2-\sqrt{2}}{2}}} \quad \ell = \sqrt{\frac{1}{2-\sqrt{2}}} \quad \ell = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} \quad \ell$$

y por otra parte

$$C_{\perp} = \frac{\ell}{2} : \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2 \times 1 - \cos \sqrt{6}} = \frac{1}{2 \times 1 - \cos \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2 \times 1 - \cos \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{$$

$$= \frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{2*(4-2)}l = \frac{2\sqrt{2}+2}{4}l = \frac{1+\sqrt{2}}{2}l$$

valores ambos coincidentes con los ya calculados.



El cálculo que re incluye a continuación, para la determinación del cadio "m" del Arquimediacon V, fue el que requindo primeramente tomando como punto de partida el vértice A.

Como puede verse es mucho más laborioso que el seguido al tomas el vértice D, en el que el radio OD es bisectris del ángulo D, cosa que no ocurre de con el radio OD. que co en bisectria del ángulo A. to es.

Et resultade final es conncidente en ambos procesos, como lógicamente debía sucedes.



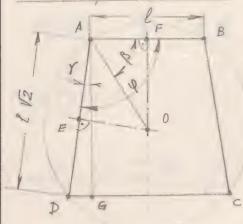


Figura 1

Lete prégons es un trapecio isosceles (figura 1), cuya base menor AB es el lado "l" del arquimediano (lado de las recas triamquelares, y los otros tres lados (BC = CD = DA), todos iqua les, son diagonales de las tres

caras cuadradas que junto con la trianquela, concuveren en cualquier carregulo ablido de dicho arquiruedono.

Sea (fig. 1), A.B.C.D, el trapecio isorceles; E punto
medio del lado AD, y E el medio del AB. Eracusos

per E g F, serfendiculares respectibilmente a DA g AB;

dichas perpudiculares e contarair en D, centro de le

circumferencia circumscrita, cuyo radio OA = m, que
remos determinar. Toracemos tambien per A, la perpen

dicular al lado DC, cuyo pie G mos determina el

triangulo rectangulo A.D.G, recto en G.

de le diquera se deluce:

AB = C

6c = DC = DA = 1/2

 $DG = \frac{DC - AB}{2} = \frac{\ell_1 - \ell_2}{2} = \frac{\sqrt{2} - \ell_1}{2} \ell_2$ [3]

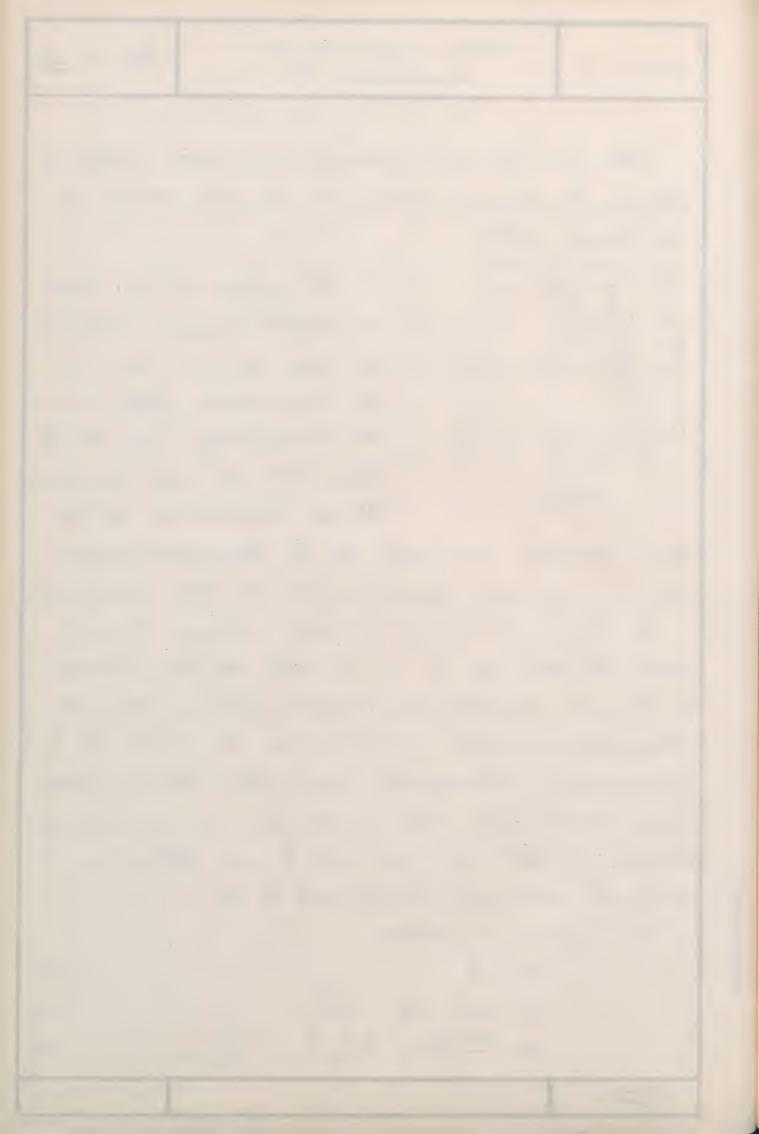
UNE A4 210 X

(FC

10 - 3 - 73

[1]

[2]



de le [3] 9 [2], as dedice:

$$\gamma$$
 siendo $\Psi = Y + \frac{\pi}{2}$ ma ω $\Psi = - cen Y, par lo que$

$$\cos \varphi = -\alpha \cos \gamma = -\frac{2 - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2} - 2}{4}$$

ren
$$\psi = \sqrt{1 - \cos^2 \psi} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2} - 2}{4}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{2 + 4 - 4\sqrt{2}}{16}} = \sqrt{1 - \frac{6 -$$

$$=\sqrt{4-\frac{3-2\sqrt{2}}{8}}=\sqrt{\frac{8-3+2\sqrt{2}}{8}}=\sqrt{\frac{5+2\sqrt{2}}{8}}$$

Le la figure se déduce :

$$AO = \boxed{m} = \frac{AF}{\cos \beta} = \frac{l}{2 \cos \beta}$$

y tambien

$$A0 = m = \frac{AE}{\cos(\varphi - \beta)} = \frac{\ell \sqrt{2}}{2 \cos(\varphi - \beta)}$$

D. la [7] , [8]

$$\frac{\ell}{2 \cos \beta} = \frac{\ell \sqrt{2}}{2 \cos (\ell - \beta)} = \sqrt{2} \cos \beta ...$$

cos 4 cos 13 - sen 4 sen 13 - 1/2 cos 8 .

2i hacemed en [9] cos $\beta = x$; cos Y = p; sur Y = 2

tendremos:

[7]

[8]

197



$$f = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{2} \times \cdots \qquad (f - \sqrt{2}) \times = \sqrt{1-x^2}$$

$$p - \sqrt{2} = q \sqrt{\frac{1 - x^2}{x^2}} \qquad \frac{p - \sqrt{2}}{q} = \sqrt{\frac{1}{2^2} - 1} \qquad \left(\frac{p - \sqrt{2}}{q}\right)^2 = \frac{1}{x^2} - 1$$

$$\left(\frac{p-\sqrt{z}}{9}\right)^2+1=\frac{1}{x^2} = \frac{1}{\left(\frac{p-\sqrt{z}}{9}\right)^2+1}$$
 de doude.

$$x = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\rho - \sqrt{2}}{q}\right)^2 + 1}} = 2\pi \sqrt{3}$$
 [10]

valor que restituido en [7], mo de

$$m = \frac{\ell}{2\sqrt{\frac{P-\sqrt{2}}{q}^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{P-\sqrt{2}}{q}^2+1}} = \sqrt{\frac{(\frac{P-\sqrt{2}}{q})^2+1}{(\frac{P-\sqrt{2}}{q})^2+1}} = \sqrt{\frac{\ell}{(\frac{P-\sqrt{2}}{q})^2+1}} = \sqrt{\frac{\ell}{(\frac{P-\sqrt{2}}{q})^2+1}}} = \sqrt{\frac{\ell}{(\frac{P-\sqrt{2}}{q})^2+1}}}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2 + 1} \times \ell$$

sustituyendo en ésta los valores p= cos 4; 7: sen 4,

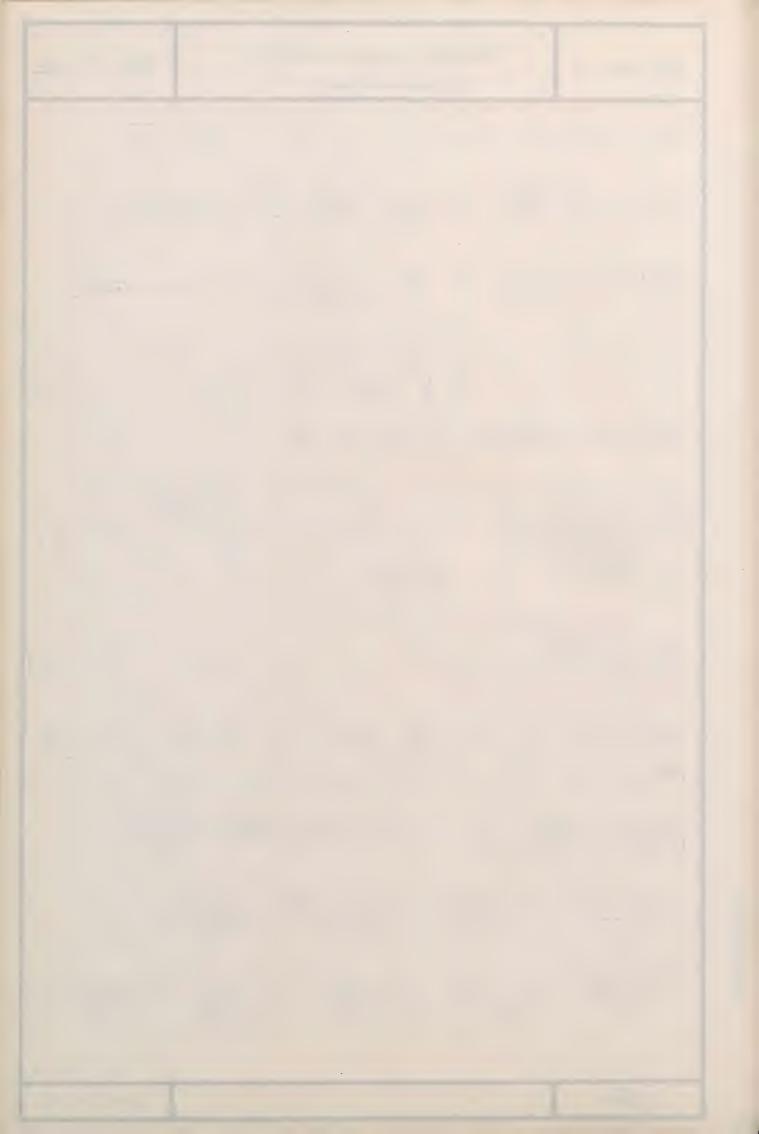
obtenidos en [5] g [6], tendremos:

$$\left(\frac{P - \sqrt{2}}{q}\right)^{2} = \left(\frac{\sqrt{2} - 2}{4} - \sqrt{2}\right)^{2} : \frac{5 + 2\sqrt{2}}{8} = \left(\frac{\sqrt{2} - 2 - 4\sqrt{2}}{4}\right)^{2} : \frac{5 + 2\sqrt{2}}{8} =$$

$$= \frac{-(3\sqrt{2}+2)^2}{16}; \frac{5+2\sqrt{2}}{8} = \frac{18+4+12\sqrt{2}}{16}; \frac{5+2\sqrt{2}}{8} =$$

$$= \frac{22 + 12 \sqrt{2}}{16} \cdot \frac{10 + 4 \sqrt{2}}{16} = \frac{22 + 12 \sqrt{2}}{10 + 4 \sqrt{2}} = \frac{11 + 6 \sqrt{2}}{5 + 2 \sqrt{2}} = \frac{(11 + 6\sqrt{2})(5 - 2\sqrt{2})}{17}$$

[11]



$$= \frac{55 + 30 \sqrt{2} - 22 \sqrt{2} - 24}{17} = \frac{21 + 8 \sqrt{2}}{17}$$

$$m = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{p - \sqrt{2}}{q}\right)^2 + 1} + \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{31 + 8\sqrt{2} + 17}{17}} + 1 - \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{31 + 8\sqrt{2} + 17}{17}} \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{31 +$$

$$= \sqrt{\frac{48 + 8 \sqrt{2}}{4 \times 17}} l = \sqrt{\frac{24 + 4 \sqrt{2}}{34}} \cdot l = \sqrt{\frac{4 (6 + \sqrt{2})}{34}} l = 2 \sqrt{\frac{6 + \sqrt{2}}{34}} \cdot l$$

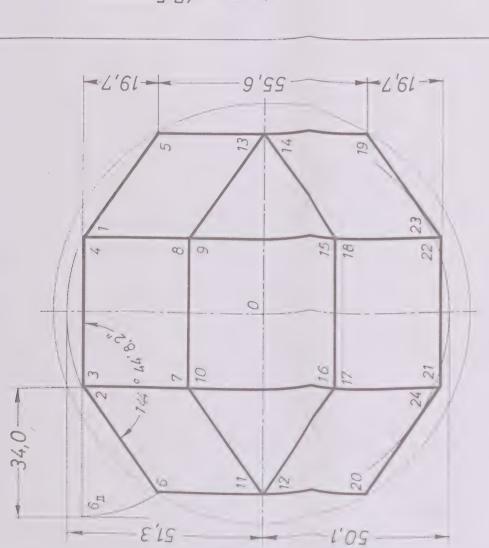
= 0,93 39 48 83...1

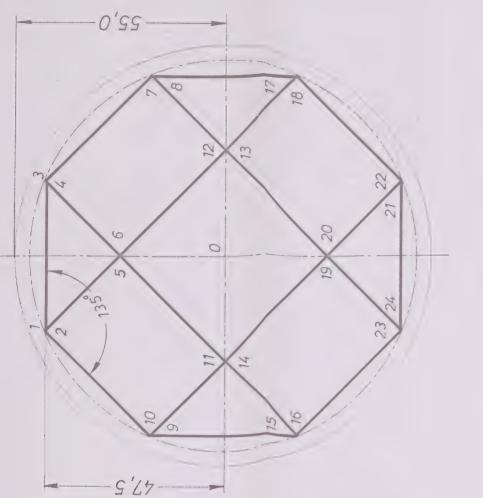






Z+





ARQUIMEDIANO V

\ +

0

× +

φ 11	11	= 24	11 78	3 C4
೦್	٠ [†]	>	V	1 C3 + 3 C4
caras triangulares	caras cuadradas	Vértices	aristas	caras de un ángulo sólido:
de	de	de	de	de
Número	Número	Número de	Número de aristas	Número de

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el Arqumediano V, en el que en cada vértice concurren un triángulo equilátero y tres cuadrados.

La longitud de su lado es de 39,3 milímetros y las coordenadas de su centro 0 son: 0 (72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

1+

5 2 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3	2
0 23	39,3
24 2 20	22 27 27

Propuesta De entrega Entregada Califi-	cación (firma)	Curso	Arquimediano V
De entrega 1			ą.
Propuesta		The approximate and an experimental and the second	
	Fecha:	Alumno:	Escala 1.1

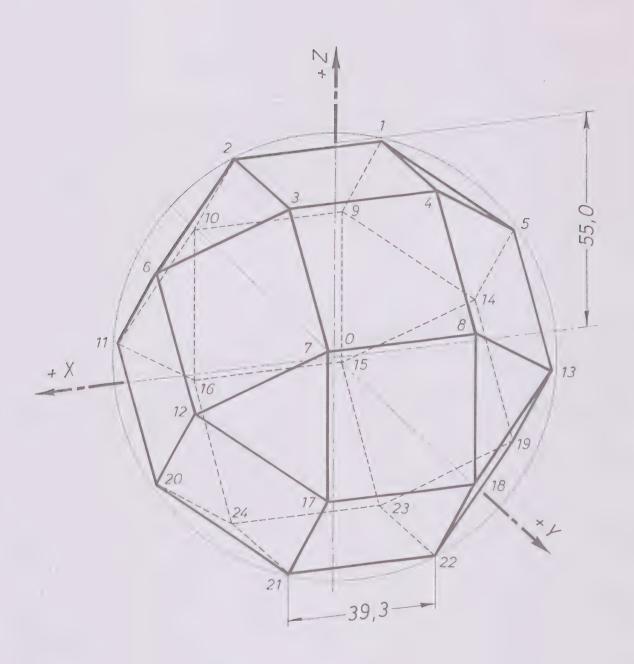
37

Lámina

- 19

Curso 19







ENUNCIDDO

promes I II. of II. et degenerations VI en et our en cada virtice commence un invançolo equilates, des curado de de se our espectados of un sucretado de caralles.

In longitud de su lado es de 24.6 m. les coordinates de ou certo 0, son 12.72 \$51 mm.

Deluire es francto 134 y a cresta 111

DATOS 0 (72, 72, 85, mp)

UNE A4 210 X 297



CONSIDERACIONES PREVIAS

Sequiremos en el estudio de este arquimediano, las dicectrices y formulas generales planteadas en el estudio del "Inquimediano I", lamina 33.

En el caso particular que mos ocupa, determinaremos las magnitudes signientes:

l = Arcista del arquimediano VI (dato del ejercicio)

a = Radio de la esfera circumerita.

b : Radio de la esfera tangente a las aristas.

C3 = Radio de la essera tangente a las caras triangulares.

C4 = Radio de la essera tangente a las caras madradas.

C5 = Radio de la esfera tangente a les cares pentagonales.

d3 = Radio de la circumferencia circumsorità a ma caca triangular

de : Radio de la circumferencia circumscrita a ma a

do : Radio de la circumferencia circumscrita a una cara pentagonal.

m = Radio de la circumferencia circumscrita al poligono obtenido al unir los extremos de las aristas de un ángulo sólido.

Az = Angulo cectilines del diedro formado por una cara triamentar, con el plano diametral del arquimedia



mo, que pesa por una arista de equélla.

de = Angulo rectilines del det diedro formado por una caca madrada, con el plans diametral del arquimento... no, que pesa por una arista de aquilla.

os. Angulo rectilines del diedro formado por una cara pentagonal, con el plano diametral del arquimediano, que pasa por una arista de aquélla.

1/3-4 = Augulo rectilines del diedro formado por una cara trianquelar y otra madrada

4,-5: Angulo rectilines del diedro formado por una cara cuadrada y otra pentagonal.

S = Superficie

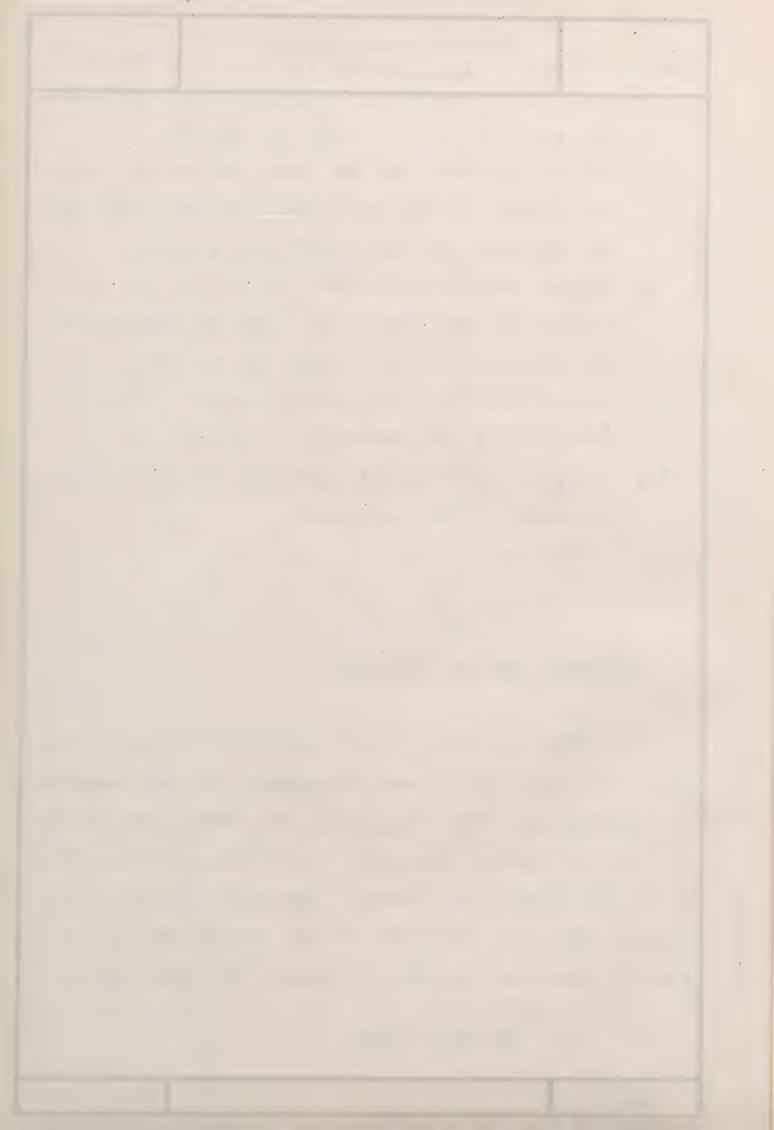
V = Volumen

PROCESO GRAFICO - ANALÍTICO

El estudio realizado de este arquimediano, mos indica que se compone de 20 caras triangulares, 30 caras cuadradas y 12 pentagonais, todas regulares; 60 vérticos y 120 aristas. En cada réstice concurren, un triangulo; des cuadrados y un pentagono, en el orden signiente P3-P4-P5-P4, en decir, las caras cuadradas mo son consecutivas; por consiquiente concurrirai también 4 arestas del arquimediano,

Asi pucs, tendremos que





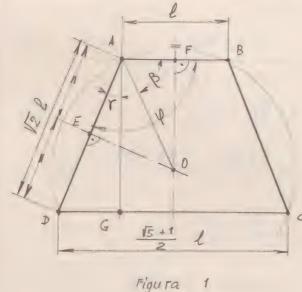
DRQUIMEDIANO VI (1P3 + 2P4 + 1P5); C3 = 20; C4 = 30; C5 = 12; V = 60; A = 120

Calculo de sus magnitudes

Saista "l" del arquimediano

Dato del ejercicio

Radio "m" de la sircumformina circumscrita al poligono obtenido al unir los esctremos de las cuatro aristas que concurren en un angulo sólido.



Este poligono es un trapecio A-B-C-D (fig. 1) isosceles, cuya base menor AB es el la do "l" del arquimediano (lado de la cara triangular); la bare mayor DC es la diagonal de la cara pentagonal de lado "l"; los lados no pa-

realelos AD y BC, ambos ignales, son a ou ves las diagonales de las dos caras cuadradas.

For Jeometrie se rabe que la diagonal de un cua. drado de lado "l", es AD = BC = 1/2 &



in dinginent de un principales organismos organismos de la de la esta

 $DC = \frac{\sqrt{E} - 1}{2}$ Li en la firma 1. travant for E = F, punto

Li un la figura 1. taaramer pr. E. F., puntos medios

de los lados Ad J. AB, perpendiculares a estos lados, ambas

se cortaran en O, centro de la circumferencia circumscrita

al trapecio isósceles A-B-C-D; uniendo O con A, el 27
mento OA será el aadio "m de distra circumferencia.

Bracemos también por A, la farjendimber al este DC, cu
yo pie G mos determina el triangulo aectangulo A-C-G,

aceto en G.

De la figura se deduce:

$$AB = \ell$$
 [1]

$$DC = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \ell$$
 [3]

$$DG = \frac{DC - AB}{2} = \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \ell - \ell\right) : 2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} - 1\right) \ell =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} \ell = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \ell$$
 [4]

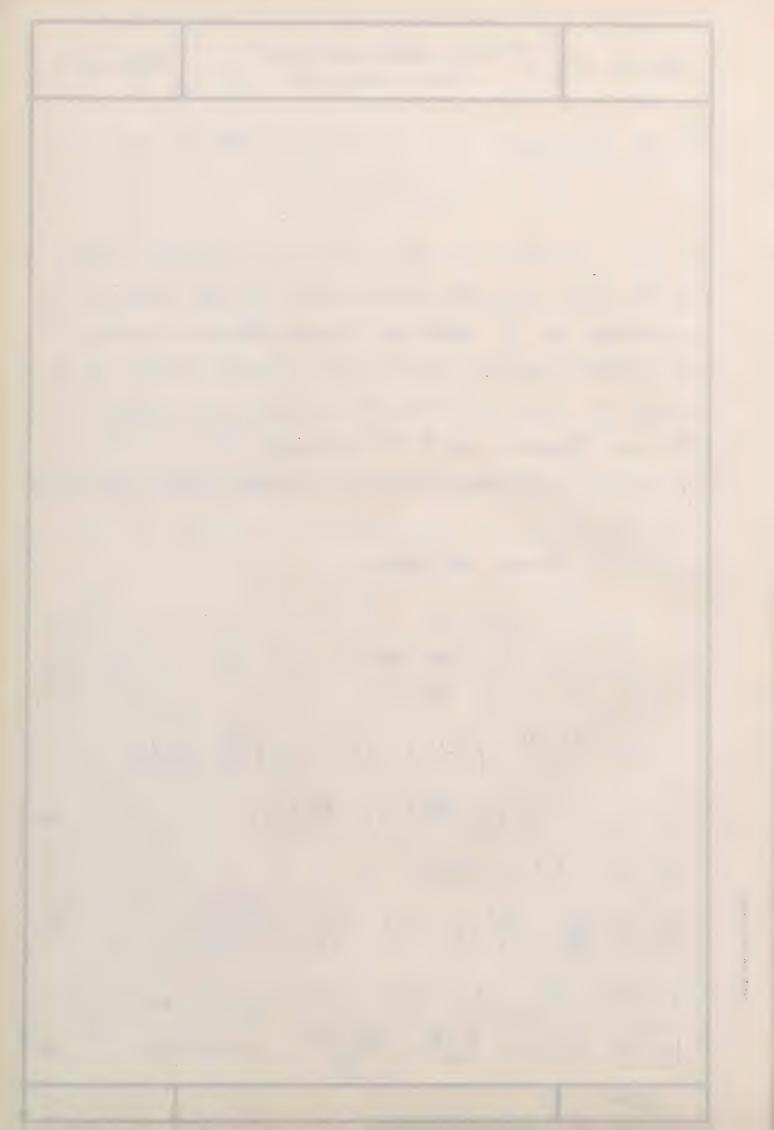
de [3] g [2] se deduce

$$sur Y = \frac{DG}{DA} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \ell : \sqrt{2} \ell = \frac{\sqrt{5} - 1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{8}$$

$$\gamma$$
 siculo $\varphi = \gamma + \frac{\pi}{2}$ serà es $\psi = -$ seu γ , ja le que

$$\cos \varphi = - nou \varphi = - \frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{10}}{8}$$
 $\gamma \neq 0$ to tauto [6]

UNE A4 210 X 29



$$22... |p| = \sqrt{1 - 643.9 \cdot 4} = \sqrt{1 - \left(\frac{100 - \sqrt{10}}{8}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{2 + 10 - 2\sqrt{20}}{64}} = \sqrt{\frac{64 - 12 + 4\sqrt{5}}{64}} = \sqrt{\frac{64 - 12 + 4\sqrt$$

$$= \sqrt{\frac{52 + 4\sqrt{5}}{64}} = \sqrt{\frac{13 + \sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{12 + \sqrt{5}}{1}}$$

[7]

De la figura ne déduce:

$$AO = \boxed{m} = \frac{AF}{\cos \beta} = \boxed{\ell}$$

1 también [8]

$$\Delta O = \boxed{m} = \frac{\Delta E}{\cos(\Psi - B)} = \frac{\sqrt{2} \ell}{2 \cos(\Psi - B)}$$

[9]

$$\frac{\ell}{2 \operatorname{cm} \beta} = \frac{\sqrt{2} \ell}{2 \operatorname{cos} (\beta - \beta)} \quad \text{"} \quad \operatorname{cos} (\beta - \beta) = \sqrt{2} \operatorname{cos} \beta$$

cos 4 cos B - sen 4 sen B = V2 cos B

[10]

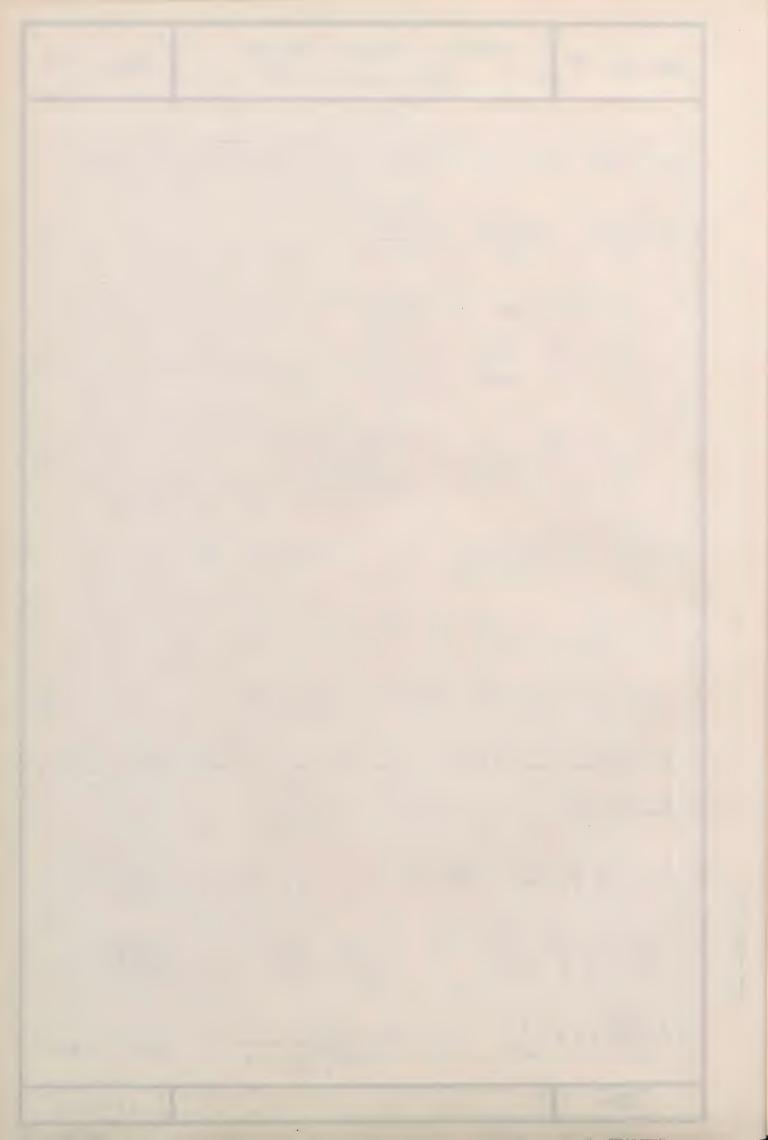
si hacemen en [10] cos $\beta = \infty$; cos $\psi = \beta$; sen $\psi = \beta$

tendremos:

$$p = -9 \sqrt{1-x^2} = \sqrt{2} = \sqrt{1-x^2}$$
 ... $(p-\sqrt{2}) = 9 \sqrt{1-x^2}$...

$$p-\sqrt{2} = \frac{9}{7}\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}}$$
 " $\frac{p-\sqrt{2}}{9} = \sqrt{\frac{1}{x^2}-1}$ " $(\frac{p-\sqrt{2}}{9})^2 = \frac{1}{x^2}-1$

$$\left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2+1=\frac{1}{\chi^2} \qquad \qquad \chi^2=\frac{1}{\left(\frac{p-\sqrt{2}}{q}\right)^2+1} \qquad \qquad \gamma \quad \text{ for a gain} :$$



(hyja ... 6

$$x = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{p-\sqrt{2}}{3}\right)^2 + 1}}$$

[11]

valor que sustituido en [8] nos da

$$\begin{bmatrix} m \end{bmatrix} = \frac{\ell}{2 \cos \beta} = \frac{\ell}{2 \sqrt{\left(\frac{P - \sqrt{2}}{q}\right)^2 + 1}} = \frac{\ell}{2 \sqrt{\left(\frac{P - \sqrt{2}}{q}\right)^2 + 1}} = \frac{\ell}{2 \sqrt{\left(\frac{P - \sqrt{2}}{q}\right)^2 + 1}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\frac{P-\sqrt{2}}{9}\right)^2+1}{4}} \quad \text{a.l.} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{P-\sqrt{2}}{9}\right)^2+1} \quad \text{a.l.}$$
 [12]

sustituyendo en [12] el valor de $p = cos Q = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{10}}{8}$, ob-

tenido en [6], g el de $q = \text{sen } \Psi = \frac{\sqrt{13 + \sqrt{5}}}{4}$ obtenido

en [7], tendremos finalmente:

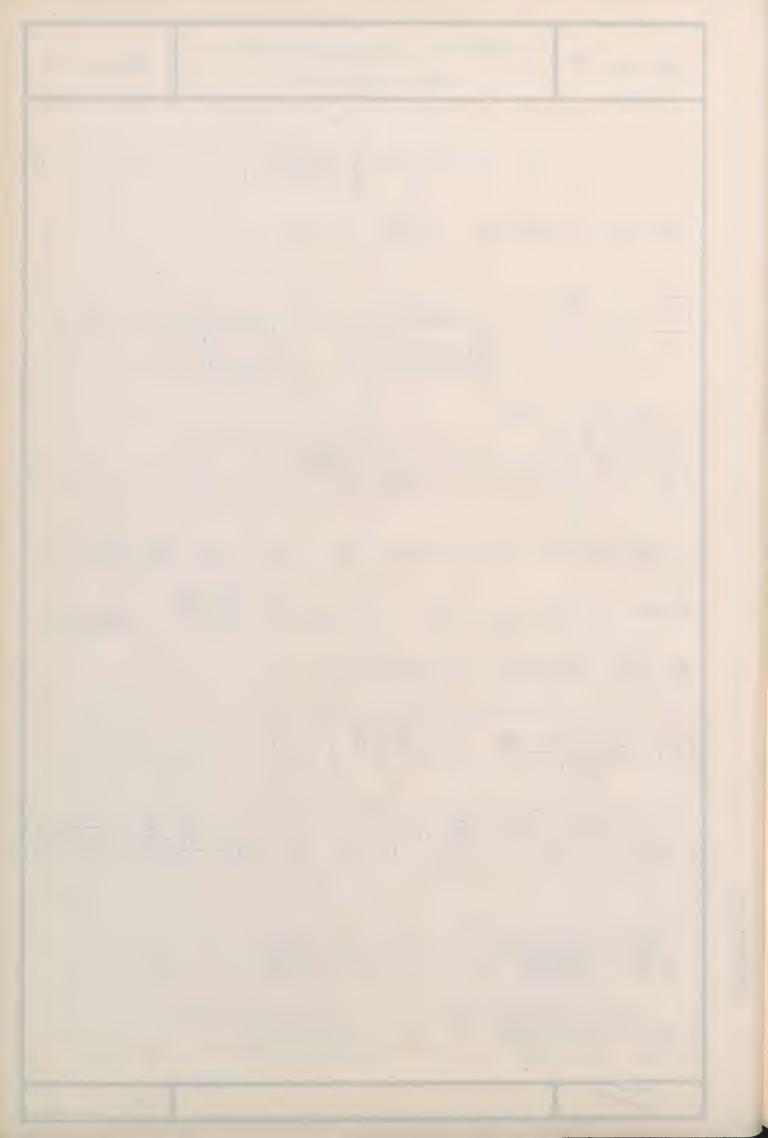
$$m = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{V_2 - V_{10}}{8} - V_2 \right) : \frac{\sqrt{13 + V_5}}{4} \right]^2 + 1 \times \ell =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{\sqrt{2} - \sqrt{10} - 8\sqrt{2}}{8} : \frac{\sqrt{13} + \sqrt{5}}{4}\right]^{2} + 1} \times \left(= \frac{1}{2} \sqrt{\left(-\frac{7\sqrt{2} + \sqrt{10}}{8} : \frac{\sqrt{13} + \sqrt{5}}{4} \right)^{2}} \right) + 1} \times \left(= \frac{1}{2} \sqrt{\left(-\frac{7\sqrt{2} + \sqrt{10}}{8} : \frac{\sqrt{13} + \sqrt{5}}{4} \right)^{2}} \right) + 1} \times \left(= \frac{1}{2} \sqrt{\left(-\frac{7\sqrt{2} + \sqrt{10}}{8} : \frac{\sqrt{13} + \sqrt{5}}{4} \right)^{2}} \right) + 1} \times \left(= \frac{1}{2} \sqrt{\left(-\frac{7\sqrt{2} + \sqrt{10}}{8} : \frac{\sqrt{13} + \sqrt{5}}{4} \right)^{2}} \right) + 1} \times \left(= \frac{1}{2} \sqrt{\left(-\frac{7\sqrt{2} + \sqrt{10}}{8} : \frac{\sqrt{13} + \sqrt{5}}{4} \right)^{2}} \right) + 1} \times \left(= \frac{1}{2} \sqrt{\left(-\frac{7\sqrt{2} + \sqrt{10}}{8} : \frac{\sqrt{13} + \sqrt{5}}{4} \right)^{2}} \right) + 1} \times \left(= \frac{1}{2} \sqrt{\left(-\frac{7\sqrt{2} + \sqrt{10}}{8} : \frac{\sqrt{13} + \sqrt{5}}{4} \right)^{2}} \right) + 1} \times \left(= \frac{1}{2} \sqrt{\left(-\frac{7\sqrt{2} + \sqrt{10}}{8} : \frac{\sqrt{13} + \sqrt{5}}{4} \right)^{2}} \right) + 1} \times \left(= \frac{1}{2} \sqrt{\left(-\frac{7\sqrt{2} + \sqrt{10}}{8} : \frac{\sqrt{13} + \sqrt{5}}{4} \right)^{2}} \right) + 1} \times \left(= \frac{1}{2} \sqrt{\left(-\frac{7\sqrt{2} + \sqrt{10}}{8} : \frac{\sqrt{13} + \sqrt{5}}{4} \right)^{2}} \right) + 1} \times \left(= \frac{1}{2} \sqrt{\left(-\frac{7\sqrt{2} + \sqrt{10}}{8} : \frac{\sqrt{13} + \sqrt{5}}{4} \right)^{2}} \right) + 1} \times \left(= \frac{1}{2} \sqrt{\left(-\frac{7\sqrt{2} + \sqrt{10}}{8} : \frac{\sqrt{13} + \sqrt{5}}{4} \right)^{2}} \right) + 1} \times \left(= \frac{1}{2} \sqrt{\left(-\frac{7\sqrt{2} + \sqrt{10}}{8} : \frac{\sqrt{13} + \sqrt{5}}{4} \right)^{2}} \right) + 1} \times \left(= \frac{1}{2} \sqrt{\left(-\frac{7\sqrt{2} + \sqrt{10}}{8} : \frac{\sqrt{13} + \sqrt{5}}{4} \right)^{2}} \right) + 1} \times \left(= \frac{1}{2} \sqrt{\left(-\frac{7\sqrt{2} + \sqrt{10} + \sqrt{10} + \sqrt{10} \right)^{2}} \right) + 1} \times \left(= \frac{1}{2} \sqrt{\left(-\frac{7\sqrt{2} + \sqrt{10} + \sqrt{10} + \sqrt{10} \right)^{2}} \right) + 1} \times \left(= \frac{1}{2} \sqrt{\left(-\frac{7\sqrt{2} + \sqrt{10} + \sqrt{10} + \sqrt{10} \right)^{2}} \right) + 1} \times \left(= \frac{1}{2} \sqrt{\left(-\frac{7\sqrt{2} + \sqrt{10} + \sqrt{10} + \sqrt{10} + \sqrt{10} \right)^{2}} \right) + 1} \times \left(= \frac{1}{2} \sqrt{\left(-\frac{7\sqrt{2} + \sqrt{10} + \sqrt{10$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\left(-\frac{7\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2\sqrt{13 + \sqrt{5}}}\right)^2 + 1} + 1 + \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(7\sqrt{2} + \sqrt{10})^2}{4(13 + \sqrt{5})}} + 1 + \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(7\sqrt{2} + \sqrt{10})^2}{4(13 + \sqrt{5})}} + 1 + \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(7\sqrt{2} + \sqrt{10})^2}{4(13 + \sqrt{5})}} + 1 + \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(7\sqrt{2} + \sqrt{10})^2}{4(13 + \sqrt{5})}} + 1 + \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(7\sqrt{2} + \sqrt{10})^2}{4(13 + \sqrt{5})}} + 1 + \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(7\sqrt{2} + \sqrt{10})^2}{4(13 + \sqrt{5})}} + 1 + \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(7\sqrt{2} + \sqrt{10})^2}{4(13 + \sqrt{5})}} + 1 + \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(7\sqrt{2} + \sqrt{10})^2}{4(13 + \sqrt{5})}} + 1 + \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(7\sqrt{2} + \sqrt{10})^2}{4(13 + \sqrt{5})}} + 1 + \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(7\sqrt{2} + \sqrt{10})^2}{4(13 + \sqrt{5})}} + 1 + \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(7\sqrt{2} + \sqrt{10})^2}{4(13 + \sqrt{5})}} + 1 + \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(7\sqrt{2} + \sqrt{10})^2}{4(13 + \sqrt{5})}} + 1 + \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(7\sqrt{2} + \sqrt{10})^2}{4(13 + \sqrt{5})}} + 1 + \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(7\sqrt{2} + \sqrt{10})^2}{4(13 + \sqrt{5})}} + 1 + \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(7\sqrt{2} + \sqrt{10})^2}{4(13 + \sqrt{5})}} + 1 + \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(7\sqrt{2} + \sqrt{10})^2}{4(13 + \sqrt{5})}} + 1 + \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(7\sqrt{2} + \sqrt{10})^2}{4(13 + \sqrt{5})}} + 1 + \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(7\sqrt{2} + \sqrt{10})^2}{4(13 + \sqrt{5})}} + 1 + \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(7\sqrt{2} + \sqrt{10})^2}{4(13 + \sqrt{5})}}} + 1 + \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(7\sqrt{2} + \sqrt{10})^2}{4(13 + \sqrt{5})}} + 1 + \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(7\sqrt{2} + \sqrt{10})^2}{4(13 + \sqrt{5})}} + 1 + \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(7\sqrt{2} + \sqrt{10})^2}{4(13 + \sqrt{5})}}} + 1 + \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(7\sqrt{2} + \sqrt{10})^2}{4(13 + \sqrt{5})}}} + 1 + \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(7\sqrt{2} + \sqrt{10})^2}{4(13 + \sqrt{5})}}} + 1 + \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(7\sqrt{2} + \sqrt{10})^2}{4(13 + \sqrt{5})}}} + 1 + \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(7\sqrt{2} + \sqrt{10})^2}{4(13 + \sqrt{5})}}} + 1 + \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(7\sqrt{2} + \sqrt{10})^2}{4(13 + \sqrt{5})}}} + 1 + \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(7\sqrt{2} + \sqrt{10})^2}{4(13 + \sqrt{5})}}} + 1 + \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(7\sqrt{2} + \sqrt{10})^2}{4(13 + \sqrt{5})}}} + 1 + \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(7\sqrt{2} + \sqrt{10})^2}{4(13 + \sqrt{5})}}} + 1 + \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(7\sqrt{2} + \sqrt{10})^2}{4(13 + \sqrt{5})}}} + 1 + \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(7\sqrt{2} + \sqrt{10})^2}{4(13 + \sqrt{5})}}} + 1 + \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(7\sqrt{2} + \sqrt{10})^2}{4(13 + \sqrt{5})}}} + 1 + \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(7\sqrt{2} + \sqrt{10})^2}{4(13 + \sqrt{5})}}} + 1 + \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(7\sqrt{2} + \sqrt{10})^2}}} + 1 + \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(7\sqrt{2$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{98 + 10 + 14 \sqrt{20}}{4 (13 + \sqrt{5})} + 1} \times \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{108 + 28 \sqrt{5}}{4 (13 + \sqrt{5})} + 1} \times \ell =$$

UNE A4 210 X 2



$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{27 + 7\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} + 1 = \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{27 + 7\sqrt{5} + 13 + \sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{40 + 8\sqrt{5}}{13 + \sqrt{5}}} \cdot \ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8(5+\sqrt{5})}{13+\sqrt{5}}} \times \ell = \sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})(13-\sqrt{5})}{13+\sqrt{5}}} \times \ell = \sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})(13-\sqrt{5})}{13^2-5}} \times \ell = \sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})(13-\sqrt{5})}} \times \ell = \sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})(13-\sqrt{5})}{13^2-5}} \times \ell = \sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})(13-\sqrt{5}$$

$$= \sqrt{\frac{2(65 + 13\sqrt{5} - 5\sqrt{5} - 5)}{164}} \times \ell = \sqrt{\frac{60 + 8\sqrt{5}}{82}} \times \ell = \sqrt{\frac{30 + 4\sqrt{5}}{41}} \times \ell = \sqrt{\frac{30 + 4\sqrt{5}}{41}} \times \ell$$

Radio "a" de la esfera circumserita

Le obtiene a plicando la formula general [1] (ver lam. 33), a este caso particular

$$a = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - m^2}} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - (\sqrt{\frac{30 + 4\sqrt{5}}{41}}\ell)^2}} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - (\sqrt{\frac{30 + 4\sqrt{5}}{41}}\ell)^2}} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - \frac{30 + 4\sqrt{5}}{41}}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{41-30-4\sqrt{5}}{47}}} \times \ell = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{41}{11-4\sqrt{5}}} \times \ell = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{41(11+4\sqrt{5})}{41^2-16\times5}} \ell =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{41 (11 + 4\sqrt{5})}{41}} \ell = \frac{1}{2} \sqrt{11 + 4\sqrt{5}} \ell = 2,23 29 50 5.... \ell$$

Para el caro del diberjo, a = 55,0 mm. de donde l = 24,631 mm.



À ...

Radio "b" de la esfera tangente a les existas.

Splicando la formula general [3] (me lane, 32), tendremes:

$$b = \sqrt{a^2 - \frac{\lambda^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{11 + 4\sqrt{5}} \cdot \ell\right)^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\frac{11 + 4\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4}} \cdot \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{10 + 4\sqrt{5}}{4}} l = \frac{1}{2} \sqrt{10 + 4\sqrt{5}} \cdot l = 2.17 62 50 90... l$$

(en dilujo · 2 · 53,6 mm)

Radio "d3" de la circumferencia circumscrita a una cara

triangular de lado "l"

Le demnestra en geometria, es

$$d_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \ell = 0.57735037...\ell$$

(en dibujo: d3 = 14.2 mm)

Radio "d4" de la circumferencia circumscrita a una cara 'cuadrada de lado "l"

Le demmestra en foomstrice es

(en dibujo: de = 17.4 mm).

Radio "d5" de la circumferencia circumscrita a una cara pentagonal regular de lado "l"

350

25 - 3 - 75



I dennesta en Grantina es

(en dibujo: ds = 27,0 mm)

Radio "C," de la estera tangente a les cares trianquelaces regulares de lado "l

Aplicando la formula general [2] (ver lam. 33), tendremos:

$$C_3 = \sqrt{a^2 - (d_3)^2} = \sqrt{(\frac{1}{2}\sqrt{11 + 4\sqrt{5}} \ell)^2 - (\frac{\sqrt{3}}{3}\ell)^2} = \sqrt{\frac{11 + 4\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{3}} \cdot \ell$$

$$= \sqrt{\frac{33 + 12\sqrt{5} - 4}{12}} \cdot \ell = \sqrt{\frac{29 + 12\sqrt{5}}{12}} \ell = \frac{\sqrt{\frac{40}{2}} + \sqrt{\frac{18}{2}}}{2\sqrt{3}} \ell = \frac{\sqrt{\frac{40}{2}} + \sqrt{\frac{18}{2}}}{2\sqrt{\frac{18}{2}}} \ell = \frac{\sqrt{\frac{40}{2}} + \sqrt{\frac{18}{2}}}{2\sqrt{3}} \ell = \frac{\sqrt{\frac{40}{2}}}{2\sqrt{3}} \ell =$$

$$= \frac{\sqrt{20} + \sqrt{9}}{2\sqrt{3}} \ell = \frac{2\sqrt{5} + 3}{2\sqrt{3}} \ell = \frac{2\sqrt{15} + 3\sqrt{3}}{6} \ell = 2.15701985....\ell$$

(ou diligo: 53.1 mm.)

Radio "c," de la esfera tangente a las mos curadradas de lado "l"

Aplicando la formula queral [2] per lam. 3?), tendranos:

$$C_4 = \sqrt{a^2 - (d_4)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{11 + 4\sqrt{5}}\ell\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\right)^2} = \sqrt{\frac{11 + 4\sqrt{5}}{4} - \frac{2}{4}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{9+4\sqrt{5}}{4}} \ell = \frac{1}{2} \sqrt{9+4\sqrt{5}} \ell = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{10}{2}} + \sqrt{\frac{8}{2}} \right) \ell = \frac{1}{2} \left(\sqrt{5} + 2 \right) \ell = \frac{1}{2} \left($$



 $=\left(1+\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 2.11.80.33.99....$

(en dibujo: 6, = 52, 2 mm)

Radio "Cg" de la esfera tangente a les caras pentagomales regulares de lado "l"

Aplicando la formula general [2], (mer lam. 33), tendremos:

 $C_5 = \sqrt{a^2 - (d_5)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{11 + 4\sqrt{5}}\ell\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}\ell\right)^2} = \sqrt{\frac{11 + 4\sqrt{5}}{4} - \frac{5 + \sqrt{5}}{10}} \times \ell =$

 $= \sqrt{\frac{55 + 20\sqrt{5} - 10 - 2\sqrt{5}}{20}} \quad \ell = \sqrt{\frac{45 + 18\sqrt{5}}{20}} \quad \ell = \sqrt{\frac{9(5 + 2\sqrt{5})}{20}} \quad \ell = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} \ell$

= 2,06 45 72 9 ... l

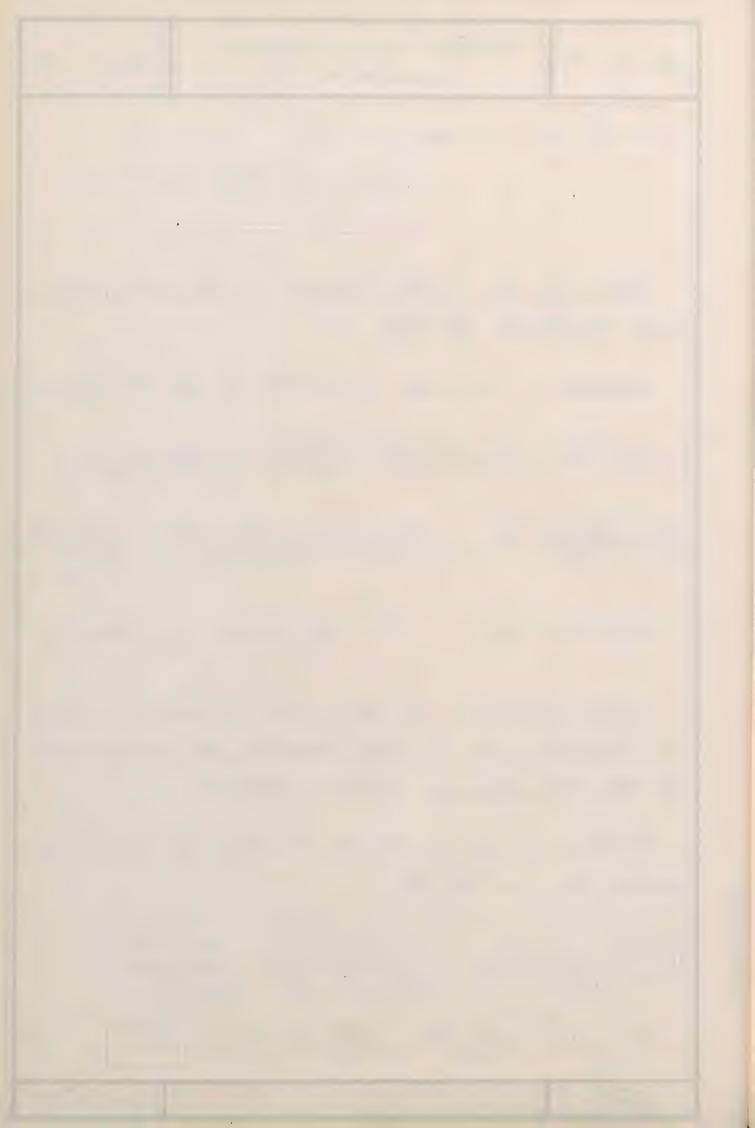
(en dibujo: C= 50.8 mm)

Laquelo rectilines "x3" del dido tomado por me The Triangular, com il plano diametral del arquine diano que pasa por una arista de aquella.

Le obtiene, en funcion de su tangente, par la formula general [5] ver lam. 33)

 $\frac{1}{5} \propto_{3} = \frac{2 C_{3}}{\sqrt{4 (d_{3})^{2} - \ell^{2}}} = \frac{2 \times \frac{2\sqrt{15} + 3\sqrt{3}}{6} \ell}{\sqrt{4 (\frac{\sqrt{3}}{3} \ell)^{2} - \ell^{2}}} = \frac{2\sqrt{15} + 3\sqrt{3}}{3\sqrt{4 \times \frac{1}{3} - 1}}$

 $= \frac{2\sqrt{15} + 3\sqrt{3}}{2\sqrt{17}} = \frac{2\sqrt{15} + 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{45} + 9}{3} = \frac{6\sqrt{5} + 9}{3} = \frac{2\sqrt{5} + 3}{3} = \frac{2\sqrt{5}$



= 7, 47 21 35 95 ...

Luculs cuclilines "a," del diedro formado por una cara cuadrada, con el plano diametral del asquimediano que pasa por una arista de aquella.

Le obtiene, en funcion de su tangente, por la forannele general [6] (ver lain. 33)

$$\frac{7}{\sqrt{4}} = \frac{2 C_{4}}{\sqrt{4 (d_{4})^{2} - \ell^{2}}} = \frac{2 \times (4 + \frac{\sqrt{5}}{2}) \ell}{\sqrt{4 (\frac{\sqrt{2}}{2} \ell)^{2} - \ell^{2}}} = \frac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{4 \times \frac{2}{4} - 1}} = \frac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{4 \times \frac{2}{4}$$

= 4, 23 60 67 98 ---

lg 4, 23 60 67 98 -- = 0,62 69 62 9

×4 = 76° 43' 2,9"

Angulo rectilines " «5" del diedro forma do por una cana pentagonal regular, com el plano diametral del arquimediano que para sa ma arista de aquella.

Le oblieve, en funcion de su tangente, par la forannela general [6] (ver lam. 33)

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2 c_5}{\sqrt{4 (d_5)^2 - \ell^2}} = \frac{2 \times \frac{3}{2} \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} \ell}{\sqrt{4 (\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} \ell)^2 - \ell^2}} = \frac{3\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}}{\sqrt{4 \times \frac{5 + \sqrt{5}}{10} - 1}} = \frac{3\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}}{\sqrt{4 \times \frac{5 + \sqrt{5}}{10} - 1}}$$

ES

25 - 3 - 73



4 5 0 = 0, 47 7/ 2/ 3...

×5 = 7/° 33' 54,2"

Laquelo aectilineo P3-4 del dirdeo formado por una crea triangular aequilar q una enadrada

Aplicando la formula general [4] (mes lam. 33), tendremos:

43-4 = ×3 + ×4 = 82° 22' 38,5" + 76° 43' 2.9" =

= 159° 5' 41, 4"

Angulo «ectiline» 94-5 del diedro formado por mua ca-

Aplicando la firanula general [4] (ver lam. 33), tendremos:

 $\Psi_{4-5} = \alpha_4 + \alpha_5 = 76^{\circ} 43' 2,9" + 71^{\circ} 33' 54.2" =$

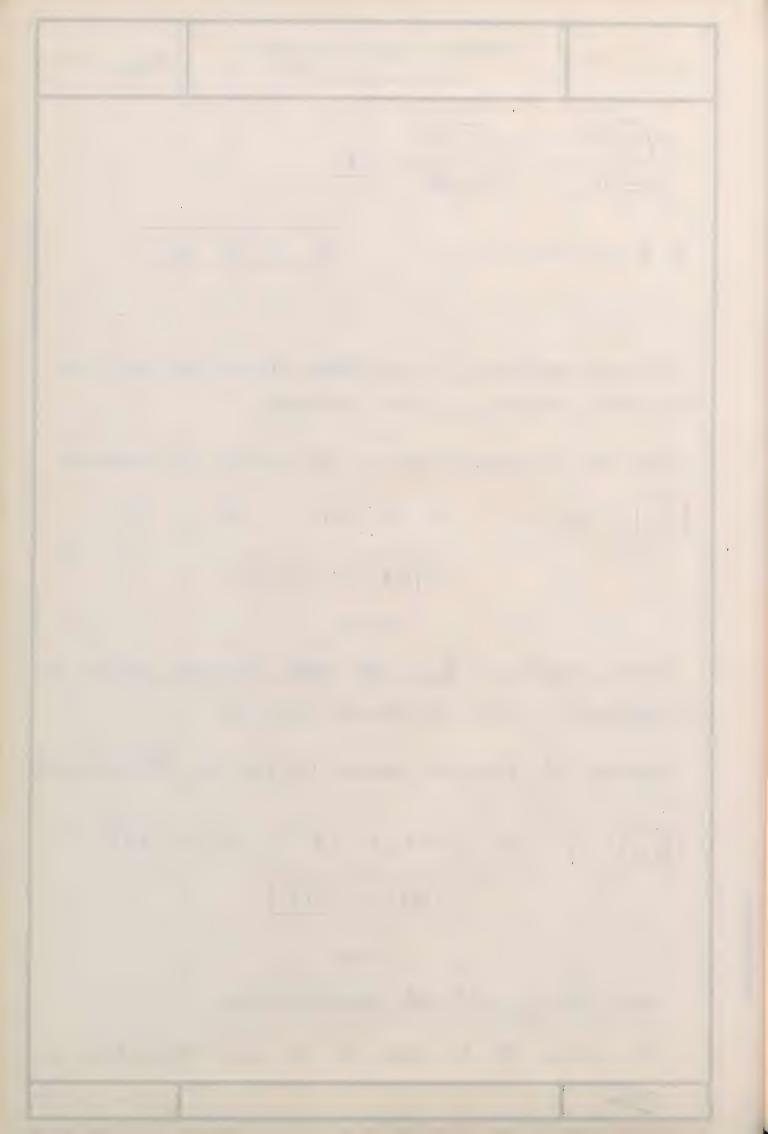
= 148° 16' 57,1"

Area lateral "S" del arquimediano

Le compone de la suma de 20 caras trianquelares re-

(3)

25 - 3 - 73



quilores. 30 rese cuadrador q 12 coras pentagonales requilares, todas de lado "l"; la superficie cera pues:

$$S = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \ell^2 + 30 \ell^2 + 12 \times \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{4} \ell^2 = \left(5\sqrt{3} + 30 + 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}\right) \times \ell^2$$

 $= (8,66 \ 02 \ 54 \ 1 + 30 + 20,64 \ 57 \ 28 \ 8) \ell^2 = 59, 30 \ 59 \ 82 \ 9 - - \ell^2$

Volumer "V" del arquimediano

la regular g altura "C3"; de 30 piramides de base cuadrada g altura "C4"; g finalmente de 12 piramides de
base pentagonal regular g altura "C5"; au volumen rena puel:

$$V = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \ell^2 \times \frac{C_3}{3} + 30 \ell^2 \times \frac{C_4}{3} + 12 \times \frac{\sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}}{4} \ell^2 \times \frac{C_5}{3} =$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{3} \ell^{2} \times \frac{2\sqrt{15} + 3\sqrt{3}}{6} \ell + 10 \ell^{2} \times \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \ell + \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \ell^{2} \times \frac{3}{2} \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} \ell =$$

$$=\frac{5}{18}\left(2\sqrt{45}+9\right)\ell^{3}+\left(10+5\sqrt{5}\right)\ell^{3}+\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\times\left(25+10\sqrt{5}\right)\ell^{3}=$$

$$=\frac{5}{6}\left(2\sqrt{5}+3\right)\ell^{3}+\left(10+5\sqrt{5}\right)\ell^{3}+\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\times\left(5+2\sqrt{5}\right)\times5$$

$$= \frac{5}{6} (2\sqrt{5} + 3) \ell^3 + (10 + 5\sqrt{5}) \ell^3 + \frac{3}{2} \times (5 + 2\sqrt{5}) \ell^3 =$$

$$\frac{5(2\sqrt{5}+3)+6*(10+5\sqrt{5})+9(5+2\sqrt{5})}{6}\ell^{3}=\frac{10\sqrt{5}+15+60+30\sqrt{5}+45+18\sqrt{5}}{6}\ell^{3}=\frac{10\sqrt{5}+15+60+30\sqrt{5}+45+18\sqrt{5}}{6}\ell^{3}=\frac{10\sqrt{5}+15+60+30\sqrt{5}+45+18\sqrt{5}}{6}\ell^{3}=\frac{10\sqrt{5}+15+60+30\sqrt{5}+45+18\sqrt{5}}{6}\ell^{3}=\frac{10\sqrt{5}+15+60+30\sqrt{5}+45+18\sqrt{5}}{6}\ell^{3}=\frac{10\sqrt{5}+15+60+30\sqrt{5}+45+18\sqrt{5}}{6}\ell^{3}=\frac{10\sqrt{5}+15+60+30\sqrt{5}+45+18\sqrt{5}}{6}\ell^{3}=\frac{10\sqrt{5}+15+60+30\sqrt{5}+45+18\sqrt{5}}{6}\ell^{3}=\frac{10\sqrt{5}+15+60+30\sqrt{5}+45+18\sqrt{5}}{6}\ell^{3}=\frac{10\sqrt{5}+15+60+30\sqrt{5}+45+18\sqrt{5}}{6}\ell^{3}=\frac{10\sqrt{5}+15+60+30\sqrt{5}+45+18\sqrt{5}}{6}\ell^{3}=\frac{10\sqrt{5}+15+60+30\sqrt{5}+45+18\sqrt{5}}{6}\ell^{3}=\frac{10\sqrt{5}+15+60+30\sqrt{5}+45+18\sqrt{5}}{6}\ell^{3}=\frac{10\sqrt{5}+15+60+30\sqrt{5}+45+18\sqrt{5}}{6}\ell^{3}=\frac{10\sqrt{5}+15+60+30\sqrt{5}+45+18\sqrt{5}}{6}\ell^{3}=\frac{10\sqrt{5}+15+60+30\sqrt{5}+45+18\sqrt{5}}{6}\ell^{3}=\frac{10\sqrt{5}+15+15+18\sqrt{5}}{6}\ell^{3}=\frac{10\sqrt{5}+15+15+18\sqrt{5}}{6}\ell^{3}=\frac{10\sqrt{5}+15+15+18\sqrt{5}}{6}\ell^{3}=\frac{10\sqrt{5}+15+15+18\sqrt{5}}{6}\ell^{3}=\frac{10\sqrt{5}+15+15+18\sqrt{5}}{6}\ell^{3}=\frac{10\sqrt{5}+15+15+18\sqrt{5}}{6}\ell^{3}=\frac{10\sqrt{5}+18\sqrt{5}}{6}\ell^{3}=\frac{10\sqrt{5}+18\sqrt{5}}{6}\ell^{3}=\frac{10\sqrt{5}+18\sqrt{5}}{6}\ell^{3}=\frac{10\sqrt{5}+18\sqrt{5}}{6}\ell^{3}=\frac{10\sqrt{5}+18\sqrt{5}}{6}\ell^{3}=\frac{10\sqrt{5}+18\sqrt{5}}{6}\ell^{3}=\frac{10\sqrt{5}+18\sqrt{5}}{6}\ell^{3}=\frac{10\sqrt{5}+18\sqrt{5}}{6}\ell^{3}=\frac{10\sqrt{5}+18\sqrt{5}}{6}\ell^{3}=\frac{10\sqrt{5}+18\sqrt{5}}{6}\ell^{3}=\frac{10\sqrt{5}+18\sqrt{5}}{6}\ell^{3}=\frac{10\sqrt{5}+18\sqrt{5}}{6}\ell^{3}=\frac{10\sqrt{5}+18\sqrt{5}}{6}\ell^{3}=\frac{10\sqrt{5}+18\sqrt{5}}{6}\ell^{3}=\frac{10\sqrt{5}+18\sqrt{5}}{6}\ell^{$$



$$= \frac{120 + 58 \sqrt{5}}{6} \ell^3 = \left(20 + \frac{29 \sqrt{5}}{3}\right) \ell^3 = 41, 61 53 23 78... \ell^2$$

FIGURA CORPÓREA

La Miene pe ous sements de 21 homogules oquilaires de la homogules oquilaires de la la semente de la mai de la mai la doi el acopia ments deberá ha mes de forma que se ese vettire concurren l'anacento. L'anacen

En al enadro simoptico que damos a continuación en suminos los acontrados analíticos obtenidos anterior mente.



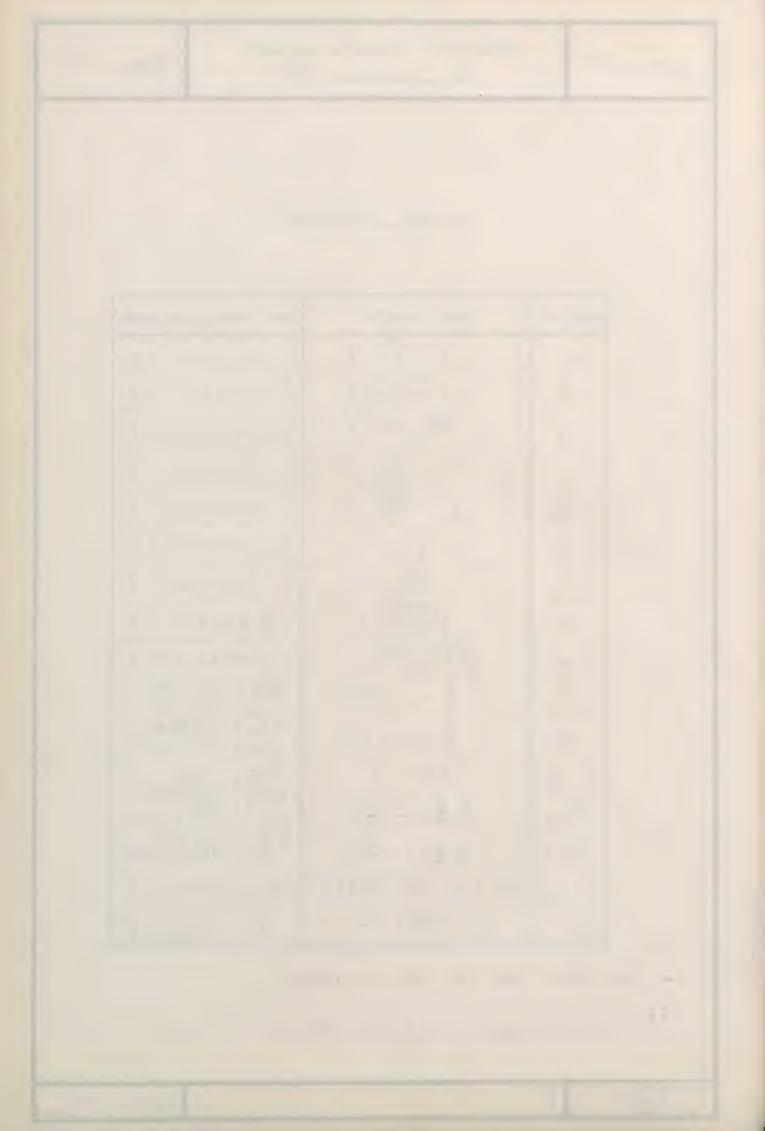
CUADRO SINOPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	1 V11 + 4 V5 l	2 23 29 51l
Ь	1/2 V10 + 4V5 l	2, 17 62 51 l
C3	2 V15 + 3 V3 e	2. 15 70 20 [
CL	1 + 1/5 1	2, 11 80 34 2
C ₅	$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \ell$	2, 06 45 73 l
d ₃	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ ℓ	0, 57 73 50l
du	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ ℓ	0, 70 71 07 L
ds	V 5 + V5	0, 85 0€ 57 €
m	V 30 + 4 V5	0, 97 46 08l
43	tq x3 = 2 V5 + 3	tg. «3 = 7. 47 21 36 «3 = 82° 22′ 38,5″
×4	tg d4 = 2 + V5	\$ ≈4 = 4, 23 60 68 ≈4 = 76° 43′ 2,9″
$\alpha_{\bar{5}}$	to as = 3	ξα ₅ = 3 α ₅ = 77° 33′ 54.2″
43-4	tg 43-4 = - 3-VF *	134 = 159° 5' 41,4"
4-5	$tg \ V_{4-5} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	tg γ ₄₋₁₀ = -0.67 80 34 γ ₄₋₅ = 148° 16' 57,1"
5	(5 V3 + 30 + 3 V25 + 10 V5) 12	59, 30 59 83 22
V	$(20 + \frac{29\sqrt{5}}{3})$ ℓ^3	41, 61 53 24 l³

* Ver calculo ban. 44, hoja 12 (reverso)

Ver ealents 6am. 44, hoja 14 (reverso)





IROFE SRAFICO - ANALÍTICO

Después del cálculo de las magnitudes principales, vamos a proceder en la lámina 38, a la representación gráfica del arquimediano VI.

Fara au trasado mos valdremos de cotas calculadas por las fórmulas anteriores, de procesos gráficos y de cotas complementamens cuyo entento electroaremos, portesión este. Codas
las omagnitudes las obtendremos en función del lado "l","
del arquimediano, cuya longitud es de 24,6 mm.

Calculerus previamente las signientes magnitudes:

lvI = Dato del ejercicio = 24,6 mm

d = 2, 23 29 51... x 24, 6 = 55,0 mm

b = 2, 17 62 51 -.. x 24, 6 = 53.6 mm

 $C_3 = 2, 15, 70, 20... \times 24.6 = 53.1 \text{ mm}$

C4 = 2, 11 80 34 ... × 24,6 = 52.2 mm

C₅ = 2, 06 45 73... x 24,6 = 50.8 mm

d3 = 0, 57 73 50... x 24,6 = 14,2 mm

d4 = 0, 70 71 07 ... x 24,6 = 17,4 mm

d₅ = 0, 85 06 51 ... x 24,6 = 21,0 mm

Antes de proceder al trarado gráfico, observemos en le lámima 38 que la proyección del arquimediano, en el plano II, presenta una forma omy regular que permite obtener directamente dida proyección.

bas propiedas geométricas de ella son:



- 1) Las caras 1 al 5 y 56 al 60, non pentagones regulares de virtices alternados centro en 0 y lado "l".
- 2) hos vértices Gal 15 9 46 al 55 non vértices de un decaçono regular de cuitos ou 0 9 lado "l"
- In de crujo lado pradio de su circumferencia circumsorita calcularemos postrioronente.

Travado gráfico (lam. 38), es el signiente:

1º Lituar el centro 0, de coordenades 72, 72, 85 mm

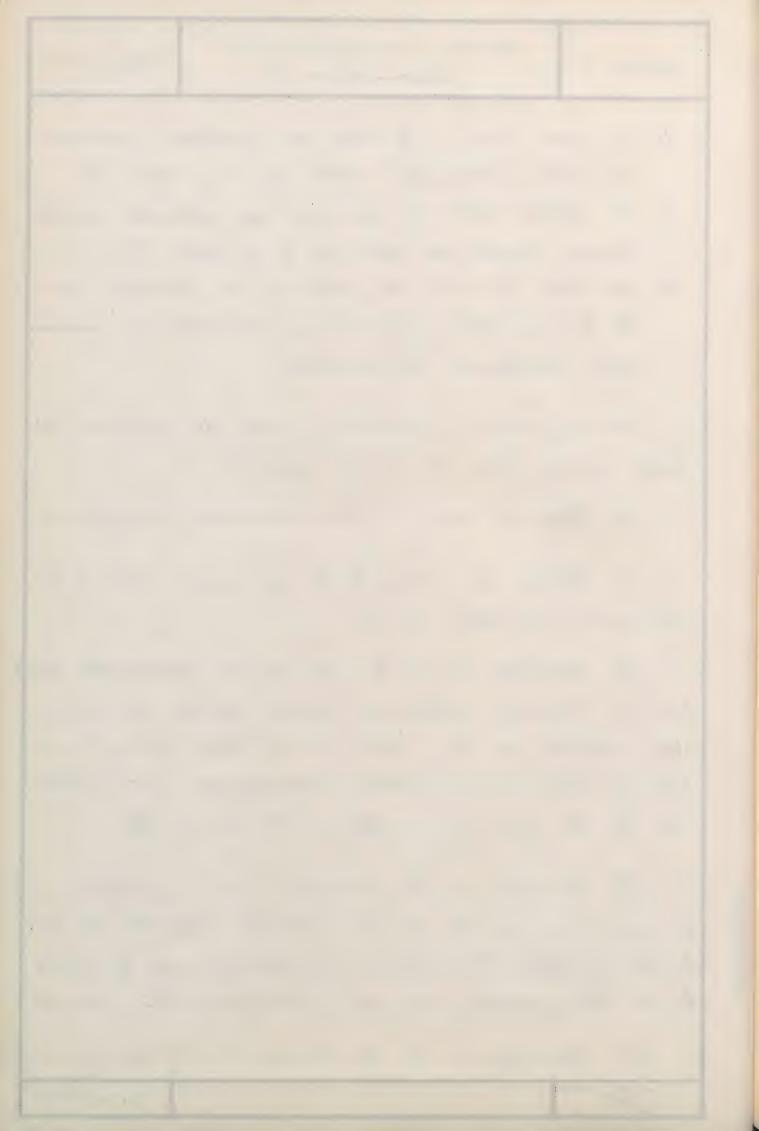
2° Dibujar en I, II y III las proyecciones de la esfera circunscrita, de radio 55 mm.

Representar in I. II. In this caras fentagenales opuertares opuertares of the second second dichas caras paralelas a II y mo de sus lados (3-4 m la surperior, 9 59-60 en la inferior) perpendicular a I (utilicere la cota "C5" en I y III, y la "d5" en I).

Le Representar en I les vértices 6 al 15 ; 46 al 55, que son a en vez les de un decagono regular de centre en 0, q lado "l" (utilicese el radio 5.), con la mitad de sus lados haraletes a los de les pentogens. 1 al 5 ; 56 al 60.

5° Representar en II les vértices 26 al 35 que ron a





dio "53" (sensittemente ignal al "a"), coloca ndo sus la dos
perpendiculares a las bisectrices de los angulos del de cagono 6 al 15 ja trazado.

Com las operaciones 3° a 5° quedan representados en II todos los vértices del arquimediano que se cumerarain y univair entre se en el orden que se indica en la lamina. Para obtener su I la proyecciones de los vértices que faltan (qua hemos situados los 1 al 5 y 56 al 60), bestará determinar presimente las alturas a que se encuentran con aespecto al centro 0: dichas alturas vienen dadas por las magnitudes "fi".

"fr" y "f3", o por las "q,", "q2" y "q3", cuyo valores 16-tendremos porteriormente; travando aectas paralelas a I y II, a las destancias anteriores, quede completares facilmente la proyección total en I, valsendose de "as proyecciones en II.

Conocidas las projecciones en I , II, la de la III es in

Como comprobación y mesesaria ayuda para el trasado gráfico dado auteriormente, samos a determinar analíticamente las signientes magnitudes uniplementareas que daran mayor exactitud a dido hasado.

Altura "n" de ma cara triangular





1657 2 20 19

Le decemente un formation es

$$n = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \ell = 0, 86 \quad 60 \quad 35 \quad 4 \dots \ell$$

Apoterna "t" de ma cara pentagonal

Le denunestra en geometria es (ver laine, le, join, 39/

$$k = \sqrt{\frac{5 + 3\sqrt{5}}{25}} \ell = 0.6881910... \ell$$

Distancia "9," de la vértices 6 al 15 al plans de la caca pentaganal 1 al 5, y de la vértices 46 al 55 a la caca pentaganal 56 al 60.

4-5 - 90° = 148° 16' 57, 1" - 90" = 58° 16' 57, 1" de doude

g, = cos 58° 16' 57, 1" x / = 0, 52 57 31 1... l

Desarrollo del cateulo auterior:



lg. cos 58° 16' 57,1" = 7, 72 07 63 7 = lg 0,52 57 311 -

cos 58° 16' 57,1" = 0,52 57 31 1 ---

Este valor se puede obtener exactamente, mediante el calculo trigonométrics de los ánquelos que intervienen, enyos valores homos descuerdo anteriormente, y enys esculo desarrollanes a continuación.

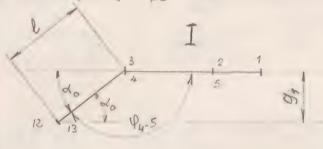


Figura 2

Jea (Lie. 2) la posyeccion parcial en I del
arquimediano. VI, que comprende la cara pentagomal 1 al 5 g la contiqua cuadrada 3-1-12-13

que forman entre se el angulo 4,-5, siendo do el anquelo suplementario del 4,-5. La magnitud de la cota "91" buscate, será pues

$$g_1 = \ell$$
 seu x_0 [1]

pero siendo $\psi_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 2 + \sqrt{5}; \quad t_1 x_2 = 3$

tendreum to
$$V_{4.5} = \frac{1}{5} (x_4 + x_5) = \frac{1}{1 - 5} x_4 + \frac{1}{5} x_5 = \frac{(2 + 15) + 3}{1 - (2 + 15) \times 3}$$

$$\frac{5+\sqrt{5}}{1-6-3\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{-5-3\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{5+3\sqrt{5}} = \frac{(5+\sqrt{5})(3\sqrt{5}-5)}{45-25} = \frac{15\sqrt{5}+15-25-5\sqrt{5}}{20}$$

$$= \frac{10\sqrt{5} - 10}{20} = -\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$
 7 de agui se deduce, siendo

4 - 4 - 73

(EQ



do = TT - 4-5) por la tento te de = - \$ 4.5.

fere

$$t_{\overline{g}} \propto_{0} = -\left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$
 g for consigning to

seu
$$d_0 = \frac{\sqrt{5-1}}{\sqrt{1+t_5^2}} d_0 = \frac{\sqrt{5-1}}{2} = \frac{\sqrt{5-1}}{2} = \frac{\sqrt{5-1}}{2} = \frac{\sqrt{5-1}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{5-1}}{2} = \frac{\sqrt{5-1}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5-1}}{2}\right)^2}; \quad \frac{5-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{\frac{5+1-2\sqrt{5}}{4}}; \quad \frac{10-2\sqrt{5}}{4}$$

$$= \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{5}}{10 - 2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{(3 - \sqrt{5})(5 + \sqrt{5})}{25 - 5}} = \sqrt{\frac{15 - 5\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 5}{20}} = \sqrt{\frac{15 - 5\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 5}{20}}$$

$$=\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{20}}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$$

valor que sustituido en [1], mos des

$$g_1 = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} \times \ell = 0.52 57 31 1 \dots \ell$$

cuys valor numérico aproximado es cuincidente con el obterido anteriormente.

Para el caso del dilenjo, serà: 9, = 0.52 57 31 1. x 24.63 = 12.9 m m.

Distancia "f," entre los dos planos paralilos a I, que contienen la vértices 6 al 15 g 46 al 55 respectivonmente



Le obtiene por diferencia de las alturas "C5" g "9,", ya calculadas.

 $|f_1| = 2 \left(C_5 - G_5 \right) = 2 \times \left(\frac{3}{5} \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \right) \ell = \left(3\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} - 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \right) \ell$

= 2 x (2, 06 45 72 9 --- - 0, 52 57 31 1 ---) l = 3, 07 76 83 6 --- l

Para el caso del dibujo, cera: f. = 3,07 76 83 6... = 24.63 = 75.8

(mase somplificación de donzo

Rodio "I," de la circumferencia circumscrita al decaçono aegular de lado "l" prétices 6 al 15 (o 46 al 55)

Le demnestra en Geometria, es

 $\Gamma_1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \ell = 1.61803399...\ell$

L'éte miemo valor se puede deducir de los que estentades anteriormente, considerantes que "17" es un cateto
de un triangulo cectainante de hipoternesa "a" y el
otro cateto "fr". Lu valor será:

 $= \sqrt{\frac{11+4\sqrt{5}}{4}} - \frac{9 \times \frac{5+2\sqrt{5}}{5} + 4 \times \frac{5-\sqrt{5}}{10} - 12\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5-\sqrt{5}}{10}}}{4} \times \ell =$

 $= \sqrt{\frac{11 + 4\sqrt{5}}{4} - \left(\frac{45 + 18\sqrt{5}}{20} + \frac{5 - \sqrt{5}}{10} - 3\sqrt{\frac{(5 + 2\sqrt{5})(5 - \sqrt{5})}{50}}\right)} \times \ell =$

4-4-73

A4 210 X 297

$$= \sqrt{\frac{11 + 4\sqrt{5}}{4} - \frac{45 + 18\sqrt{5}}{20}} - \frac{5 - \sqrt{5}}{10} + \frac{3}{5} \sqrt{\frac{25 + 10\sqrt{5} - 5\sqrt{5} - 10}{2}} \times \frac{1}{2} =$$

$$= \sqrt{\frac{55 + 20\sqrt{5}}{20} - \frac{45 + 18\sqrt{5}}{20} - \frac{10 - 2\sqrt{5}}{20} + \frac{3}{5}\sqrt{\frac{15 + 5\sqrt{5}}{2}}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{55 + 20\sqrt{5} - 45 - 18\sqrt{5} - 10 + 2\sqrt{5}}{20}} + \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{5(3 + \sqrt{5})}}{\sqrt{2}} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{4\sqrt{5}}{20} + \frac{3}{5} \times \sqrt{\frac{5}{2}} \times \left(\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \times \ell} = \sqrt{\frac{15}{5} + \frac{3}{5} \times \left(\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \times \ell} = \sqrt{\frac{15}{20} \times \frac{15}{20} \times \frac{15}{20}} \times \ell = \sqrt{\frac{15}{20} \times \frac{15}{20} \times \frac{15}{20}} \times \ell = \sqrt{\frac{15}{20} \times \frac{15}{20} \times \frac{15}{20}} \times \ell = \sqrt{\frac{15}{20} \times \frac{15}{20} \times \frac{15}{20} \times \frac{15}{20}} \times \ell = \sqrt{\frac{15}{20} \times \frac{15}{20} \times \frac{15}{20} \times \frac{15}{20}} \times \ell = \sqrt{\frac{15}{20} \times \frac{15}{20} \times \frac{15}{20} \times \frac{15}{20}} \times \ell = \sqrt{\frac{15}{20} \times \frac{15}{20} \times \frac{15}{20} \times \frac{15}{20}} \times \ell = \sqrt{\frac{15}{20} \times \frac{15}{20} \times \frac{15}{20} \times \frac{15}{20}} \times \ell = \sqrt{\frac{15}{20} \times \frac{15}{20} \times \frac{15}{20} \times \frac{15}{20}} \times \ell = \sqrt{\frac{15}{20} \times \frac{15}{20} \times \frac{15}{20} \times \frac{15}{20}} \times \ell = \sqrt{\frac{15}{20} \times \frac{15}{20}} \times \ell = \sqrt{\frac{15}{20}} \times \ell = \sqrt{\frac{15}{20}} \times \ell = \sqrt{\frac{1$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{5}} + \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{10} \times \ell = \sqrt{\frac{2\sqrt{5} + 15}{10}} \times \ell = \sqrt{\frac{5\sqrt{5} + 15}{10}} \times \ell =$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{5}+3}{2}} \ell = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \ell = \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} * \ell = \frac{\sqrt{5}+1}{2} * \ell$$

concurrente con el del radio de la circumperencia circumscrità al decagono regular de "ado "l" que, como indicamos al principio, se demuestra en geometria.

Para el caro del dibujo, sera: [7 = 1,61 80 34... x 24,63 = 39,9 mm.

Distancia "g" de la vertices 16 al 25 al plans de la cara pentagonal 1 al 5, g de la vertices 36 al 45 a le cara pentagonal 56 al 60

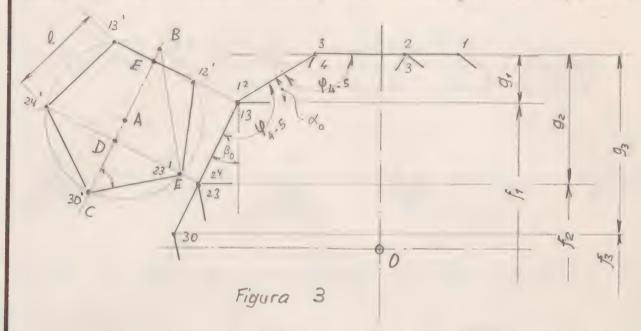
Refiriendonos a la lámina 38, vennos que la cara pero tagonal 12-13-24-30-23, contigua a la cuadrada 3-4-13-12, están proyectadas ambas sobre I, seguin lineas cectas,





que la arista comme 12-13, intersección de dichas cacas, también es perpendicular a I.

En la figura 3 representamos el contorno del arquimediano en dicha cona, que incluye el representado



en la figura 2. La cara enadrada 3-4-13-12, tiene contignas las caras pentagonales 1 al 5 por la parte emperior y 12-13-24-30-23 por la imperior; esta viltima la hemor representado tambien abatida sobre el planto del dibrejo (parte isquierda de la figura)

De la liquia se deduce:

4.5 - do = 77 + Bo

[1]

siendo "Bo" el ángulo de projección sobre II de la caca pentagonal 12-13-24-30-23.

De la [1] se deduce :





[2]

pero ya home de decido en el calculo de "gi" que

por lo que

$$\frac{1}{7} \left(V_{4-5} - v_0 \right) = \frac{\frac{1}{7} V_{4-5} - \frac{1}{7} v_0}{1 + \frac{1}{7} V_{4-5} + \frac{1}{7} v_0} = \frac{-\frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}}{1 + \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} = \frac{-(\sqrt{5}-1)}{1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2} = \frac{-(\sqrt{5}-1)}{1 + \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} = \frac{-(\sqrt{5}-1)}{1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2} = \frac{-(\sqrt{5}-1)}{1 + \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} = \frac{-(\sqrt{5}-1)}{1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} = \frac{-(\sqrt{5}-1)}{1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}-1}{2} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} = \frac{-(\sqrt{5}-1)}{1 - \left(\frac{$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2}-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{2(\sqrt{5}-1)} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}-1$$

= -2 valor que sustituido en [2] nos da

$$\frac{1}{5}\beta_0 = \frac{1}{2}$$
 [3]

de esta silliana se deduce:

$$(6) \beta_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2 \beta_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{1}{2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Por otra parte, en la cara pentagonal 12'-13'-24'-30'-23', ala tida en la parte isquier da de la fig. 3, tendremos:

CE = CD × CB (el trianquelo C:E.B es rectanquelo.

inscrits en la circumferencia de radio (.A); de donde

ES

6-4-73

UNE A4 210 X 29



$$\overline{CD} = \frac{\overline{CE}^2}{\overline{CB}} = \frac{\ell^2}{2 d_5} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}} + \ell$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{4 \times (5 + \sqrt{5})}{10}}} \times \ell = \frac{1}{\sqrt{\frac{2 (5 + \sqrt{5})}{5}}} \ell = \sqrt{\frac{5}{2 \times (5 + \sqrt{5})}} \times \ell = \sqrt{\frac{5 (5 - \sqrt{5})}{2 \times 20}} \ell = \frac{1}{\sqrt{\frac{2 \times (5 + \sqrt{5})}{5}}} \times \ell = \sqrt{\frac{5 (5 - \sqrt{5})}{2 \times 20}} \ell = \sqrt{\frac{5 (5 - \sqrt{5})$$

$$\frac{(5+\sqrt{5})}{5} = \sqrt{2\times(5+\sqrt{5})}$$

$$x l = \sqrt{\frac{5(5-\sqrt{5})}{2 \times 20}} l =$$

$$\overline{DE} = \overline{CE} - \overline{CD} = \overline{CA} + \overline{AE} - \overline{CD} = \overline{d_5} + \overline{k} - \overline{CD} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} \ell + \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{20}} \ell$$

$$-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\ell = \left[\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\right) + \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\right] \times \ell =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\right)^2 + \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}} \times \left(-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} - 2\times\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)^2$$

$$+\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} \times l = \left[\sqrt{\frac{20+4\sqrt{5}+25-5\sqrt{5}}{40}} - 2 \times \sqrt{\frac{20}{80}} + \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\right] \times l =$$

$$= \left[\sqrt{\frac{45 - \sqrt{5}}{40}} - 1 + \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{20}} \right] \times \ell = \left[\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{40}} + \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{20}} \right] \times \ell =$$

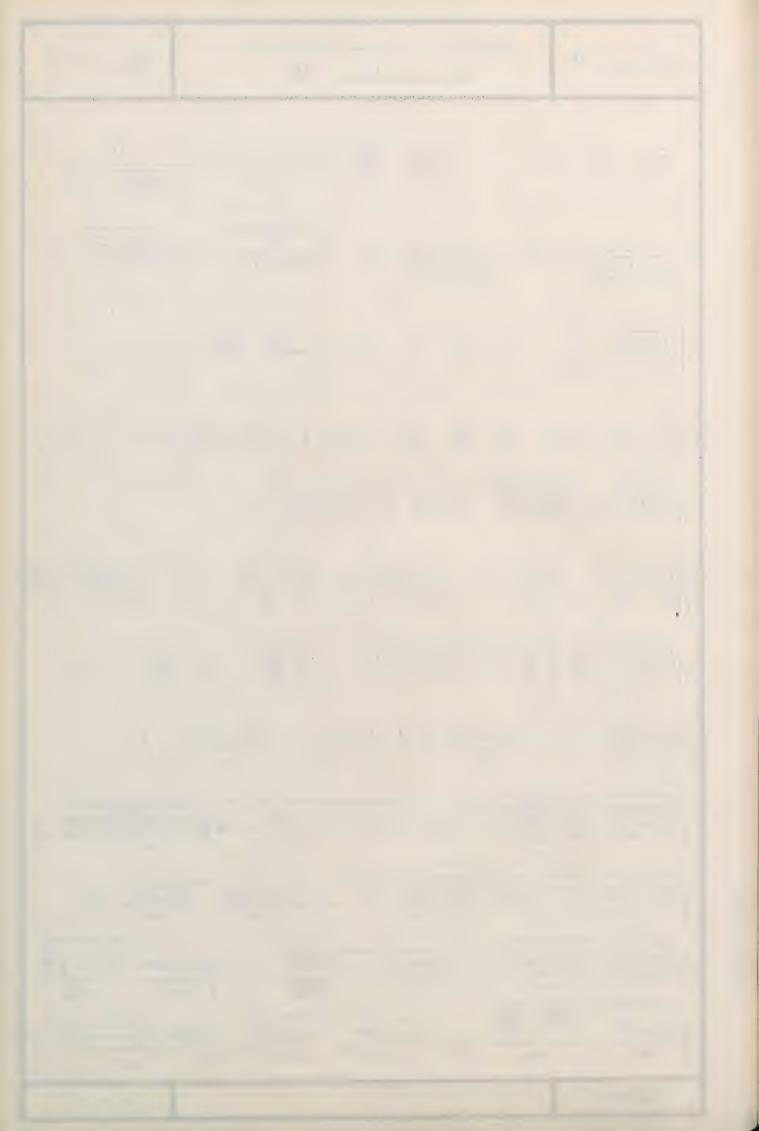
$$= \sqrt{\left(\sqrt{\frac{5-17}{40}} + \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\right)^2} \times l = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{40} + \frac{5+2\sqrt{5}}{20} + 2\times \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(5+2\sqrt{5})}{40\times20}}} \times l$$

$$= \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5} + 10 + 4\sqrt{5}}{40}} + \sqrt{\frac{25 - 5\sqrt{5} + 10\sqrt{5} - 10}{10 \times 20}} \times \ell = \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{40}} + \sqrt{\frac{15 + 5\sqrt{5}}{200}} \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{40}} + \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{40}} \times \ell = \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{40}} + \sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \ell = \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{40}} + \sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \ell = \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{40}} + \sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \ell = \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{40}} \times \ell = \sqrt$$

$$-\sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{40}} + \sqrt{\frac{50}{2}} + \sqrt{\frac{10}{2}}$$

$$+\sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{40}} + \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{20}} + \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}+10+2\sqrt{5}}{40}} = \sqrt$$



$$= \sqrt{\frac{25 + 5\sqrt{5}}{40}} \cdot \ell = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}} \cdot \ell$$

Tinalment de la Tiquin 3. 11 deters que

$$g_2 = DE \iff \beta_0 + g_1 = \sqrt{\frac{5+15}{8}} \ell + \frac{2\sqrt{5}}{5} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \ell =$$

$$= \left(\frac{2}{5} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}+\sqrt{5}}{8}} \times 5 + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right) \cdot \ell = \left(\frac{1}{5} \sqrt{\frac{5/(5+\sqrt{5})}{2}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right) \cdot \ell =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} + \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} \right) \ell = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} + \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} \right)^2} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10} + \frac{5-\sqrt{5}}{10} + 2 \cdot \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times l = \sqrt{\frac{10}{10} + 2 \cdot \sqrt{\frac{20}{100}}} \cdot l =$$

$$= \sqrt{1 + \sqrt{\frac{20}{100}}} = l = \sqrt{1 + \sqrt{\frac{4}{5}}} l = \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}} l = \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}} l = \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5$$

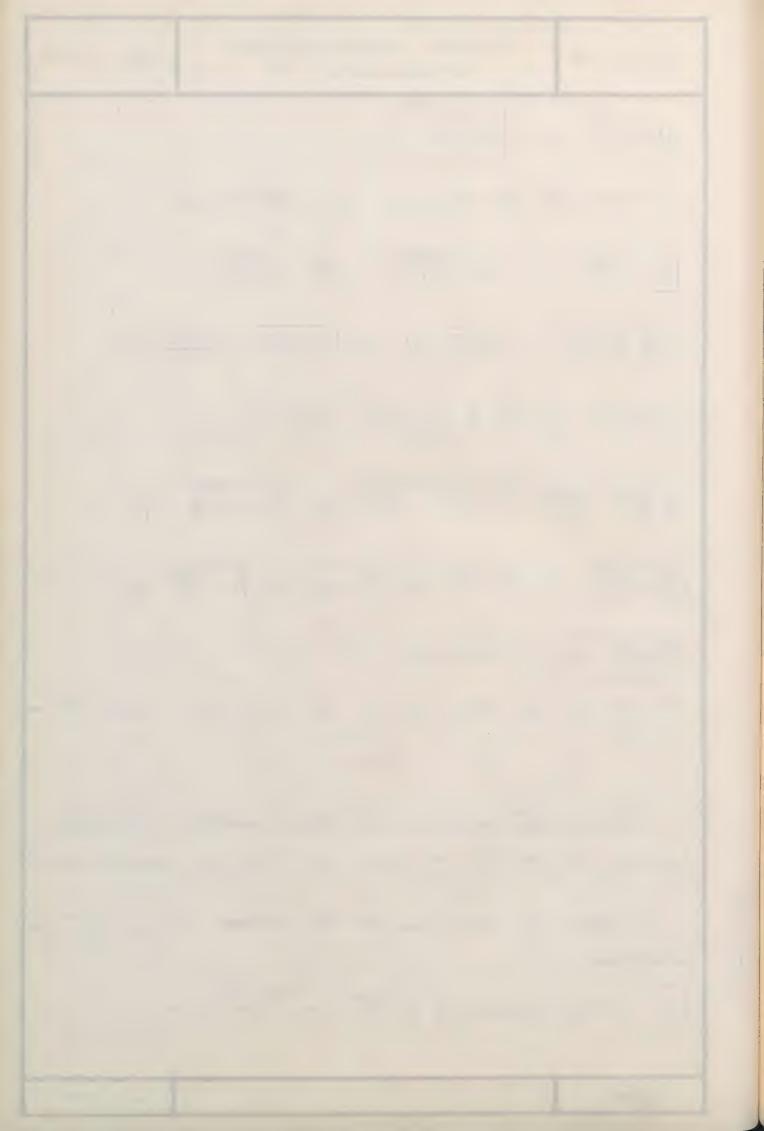
$$= \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \ell = 1, 37 63 81 9 \dots \ell$$

Fara el caro del dibujo, cera: 92 = 1,37 63 81 9... × 24.63 = 33.9 mm

Distancia "f" entre les dis planes paraleles a II, que contience les vértices 16 al 25 q 36 al 45, ces pectisamente

Le obtience por diferencias de las alturas "C5" à "9=", 7a calculadas.

$$f_2 = 2(c_5 - g_2) = 2 \times \left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5+217}{5}}\ell - \sqrt{\frac{5+217}{5}}\ell\right) =$$



 $= \left(3\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\right) \cdot \left(3\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\right) \cdot \left(3\sqrt{\frac$

El cilculo auterior mi, demuestre que

 $g_2 = f_2$

Radio "1." de la circumferencia circumscrità al poligono que tiene por vértices 16 al 25 y hambers a los 36 de 25.

$$|r_3| = \sqrt{a^2 - \left(\frac{f_3}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{11 + 4\sqrt{5}}}{2}\ell\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}\ell\right)^2} =$$

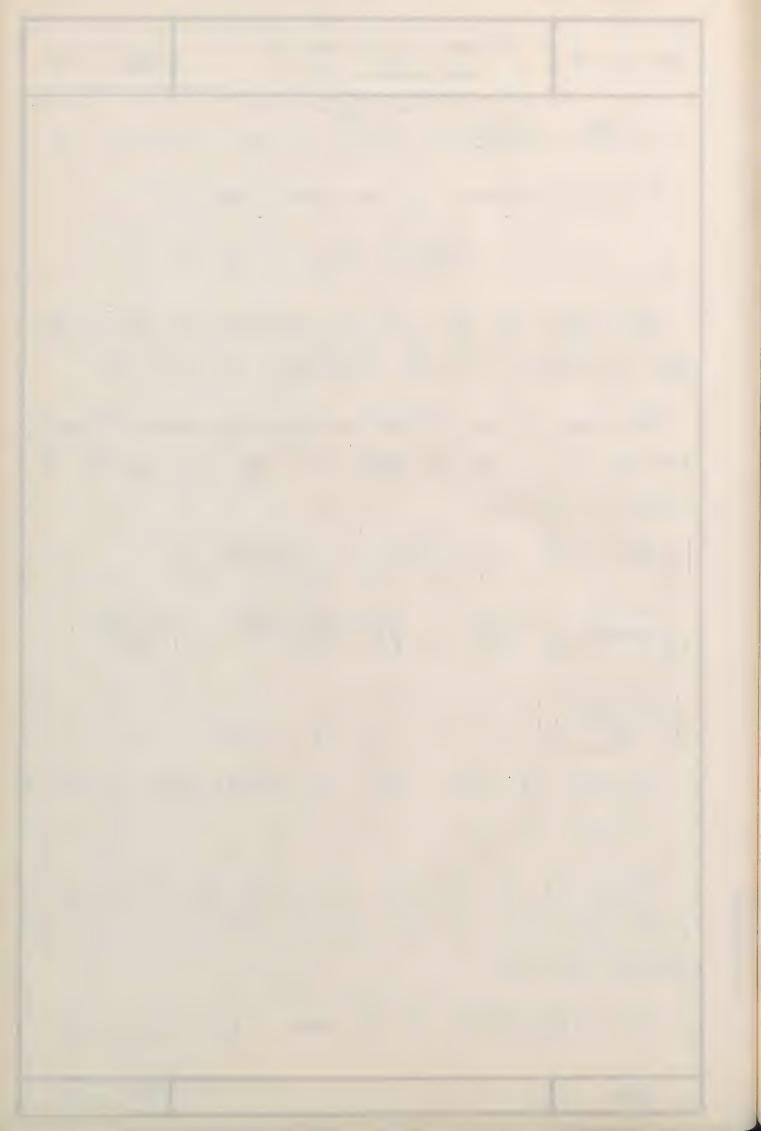
$$= \sqrt{\frac{11+4\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \quad \ell = \sqrt{\frac{55+20\sqrt{5}-5-2\sqrt{5}}{20}} \quad \ell = \sqrt{\frac{50+18\sqrt{5}}{20}} \quad \ell = \sqrt{\frac{50+18\sqrt{5}}{20}}$$

$$= \sqrt{\frac{25 + 9\sqrt{5}}{10}} \quad l = 2, 12 \ 22 \ 55 \ 24 - \dots \ l$$

Para el caso del dibujo, sera: [2:2,12 42 55 44 24,63:52,3 nm

Distancia "g3" de los vértices 26 al 30 al plano de la cara pentagonal 1 al 5, g de los vertices 31 at 35 a la cara pentagonal 56 al 60.

En la determinación de los valores "g3", "f3" à " 53",



sequiremos el mismo proceso que para los correspondientes "gz",
"fo" q " 52", ya calculados, q con las mismas referencias a
la figura 3. Le esta se assuce que:

$$= \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \ell \right] \times \frac{2\sqrt{5}}{5} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \ell = \left(\frac{2}{5} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times 5 \right) + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times 5 + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{5+\sqrt{5}}{10} \times 5 + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times 5 + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{5+\sqrt{5}}{10} \times \frac{5+\sqrt{5$$

$$+\frac{2}{5}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}\times5}+\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$$
 \times $\ell = \left(\frac{2}{5}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}+\frac{2}{5}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{4}}+\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)$ $\ell =$

$$= \left(\frac{1}{5} \sqrt{2(5+17)} + \frac{1}{5} \sqrt{5+2\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right) l = \left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{5} + \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right) l$$

$$= \left[\frac{1}{5} \times \sqrt{\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right) + \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\right)^2} + \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}\right] \times d = \left[\frac{1}{5} \sqrt{10 + 2\sqrt{5} + 5 + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})(5 + 2\sqrt{5})}}\right]$$

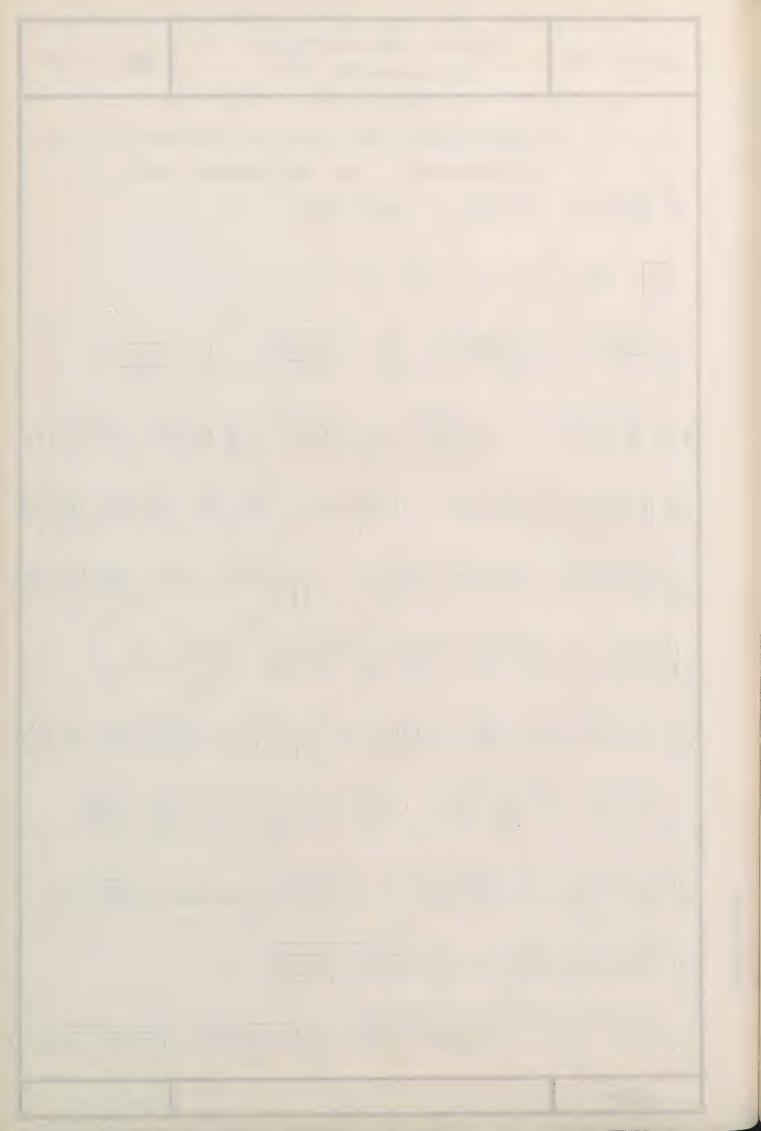
$$+\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$$
 $\ell = \left[\frac{1}{5}\sqrt{15+4\sqrt{5}+2\sqrt{50+10\sqrt{5}+20\sqrt{5}+20}}+\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right]\ell =$

$$= \left[\frac{1}{5}\sqrt{15+4\sqrt{5}+2\sqrt{70+30\sqrt{5}}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right] \ell = \left[\frac{1}{5}\sqrt{15+4\sqrt{5}+2\sqrt{10}\times\sqrt{7}+3\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right] \ell$$

$$+\sqrt{\frac{5-15}{10}}$$
 $\ell = \left[\frac{1}{5}\sqrt{15+415+6\sqrt{5}+10}+\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right] \ell = \left[\frac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}+\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right] \ell = \frac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$

$$= \left[\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} + \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} \right] \ell = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} + \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} \right)^2} \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} + \frac{5 - \sqrt{5}}{10}} + 2\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} \times \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \times (= \sqrt{\frac{10 + 4\sqrt{5} + 5 - \sqrt{5}}{10}} + 2\sqrt{\frac{25 + 10\sqrt{5} - 5\sqrt{5} - 10}{50}})$$



$$= \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{10} + 2\sqrt{\frac{15 + 5\sqrt{5}}{50}}} \cdot i = \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{10} + \sqrt{\frac{60 + 20\sqrt{5}}{50}}} \cdot i = \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{10} + \sqrt{\frac{60 + 20\sqrt{5}}{50}}} \cdot i = \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{10} + \sqrt{\frac{60 + 20\sqrt{5}}{50}}} \cdot i = \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{10} + \sqrt{\frac{60 + 20\sqrt{5}}{50}}} \cdot i = \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{10} + \sqrt{\frac{60 + 20\sqrt{5}}{50}}} \cdot i = \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{10} + \sqrt{\frac{60 + 20\sqrt{5}}{50}}} \cdot i = \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{10} + \sqrt{\frac{60 + 20\sqrt{5}}{50}}} \cdot i = \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{10} + \sqrt{\frac{60 + 20\sqrt{5}}{50}}} \cdot i = \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{10} + \sqrt{\frac{60 + 20\sqrt{5}}{50}}} \cdot i = \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{10} + \sqrt{\frac{60 + 20\sqrt{5}}{50}}} \cdot i = \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{10} + \sqrt{\frac{60 + 20\sqrt{5}}{50}}} \cdot i = \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{10} + \sqrt{\frac{60 + 20\sqrt{5}}{50}}} \cdot i = \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{10} + \sqrt{\frac{60 + 20\sqrt{5}}{50}}} \cdot i = \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{10} + \sqrt{\frac{60 + 20\sqrt{5}}{50}}} \cdot i = \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{10} + \sqrt{\frac{60 + 20\sqrt{5}}{50}}} \cdot i = \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{50}} \cdot i = \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt$$

$$= \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{10}} + \sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{5}}{5}} \times \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{10}} + \sqrt{\frac{2}{5}} \times \sqrt{3 + \sqrt{5}} \times \sqrt{\frac{15}{5}} = \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{10}} + \sqrt{\frac{2}{5}} \times \sqrt{3 + \sqrt{5}} \times \sqrt{\frac{15}{5}} = \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{10}} + \sqrt{\frac{2}{5}} \times \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{5}} \times \sqrt{\frac{15}{5}} = \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{10}} + \sqrt{\frac{2}{5}} \times \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{5}} \times \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{5}} = \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{10}} + \sqrt{\frac{2}{5}} \times \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{5}} \times \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{5}} = \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{10}} \times \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{5}} \times \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{5}} \times \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{5}} = \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{10}} \times \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{5}} \times \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}$$

$$= \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{10}} + \sqrt{\frac{2}{5}} \times \left(\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \times \ell = \sqrt{\frac{15 + 2\sqrt{5}}{10}} + \sqrt{\frac{10}{10}} + \sqrt{\frac{2}{10}} \times \ell = \ell$$

$$= \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{10}} + 1 + \frac{\sqrt{5}}{5}, \ell = \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}+10+2\sqrt{5}}{10}} \ell = \sqrt{\frac{25+5\sqrt{5}}{2}} \ell = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \ell = \sqrt{\frac{5+\sqrt$$

= 1.90 21 14 08 ... &

Vara el caso del dibrijo, rerà: 93 = 1,90 21 14 08. x 24.63 = 16.8 mm

Distancia "f3" entre los slanos paralelos a II, que contiemen los vértices 26 al 30 g 31 al 35 aespectivamente.

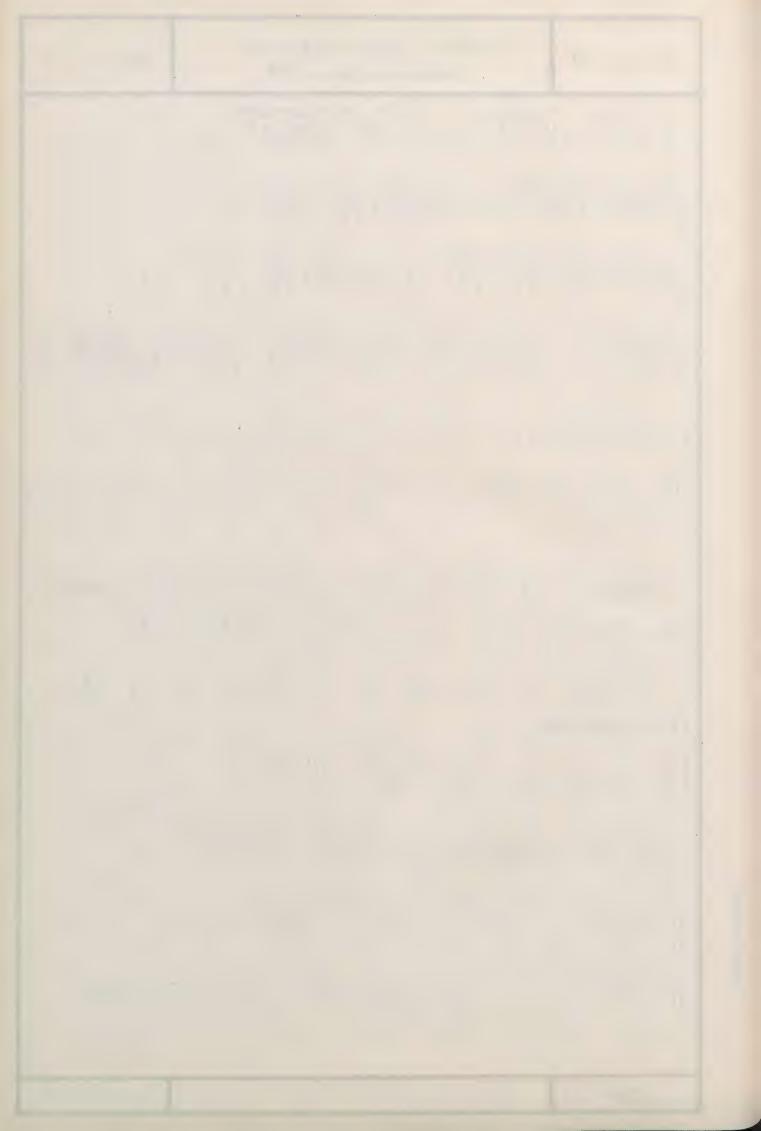
Le obtiene por diferencias de las alturas "C5" 2 " 93", ya calculadas.

$$f_3 = 2 (C_5 - g_3) = 2 \cdot (\frac{3}{2} \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} - \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}) \ell =$$

$$= \left(3\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} - 2\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)\ell = \sqrt{\left(3\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} - 2\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)^2} \times \ell =$$

$$= \sqrt{9 \times \frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} + 4 \times \frac{5 + \sqrt{5}}{2} - 12 \times \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{2}}} \times 1 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \times 1 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \times 1 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \times 1 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \times 1 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \times 1 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \times 1 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \times 1 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \times 1 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \times 1 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \times 1 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \times 1 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \times 1 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \times 1 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \times 1 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \times 1 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \times 1 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{5}} \times 1 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{5}} \times 1 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{5}} \times 1 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{5}} \times 1 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{5}} \times 1 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{5}} \times 1 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{5}} \times 1 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{5}} \times 1 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{5}} \times 1 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{5}} \times 1 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{5}} \times 1 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{5}} \times 1 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{5}} \times 1 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{5}} \times 1 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{5}} \times 1 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{5}} \times 1 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{5}} \times 1 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{5}} \times 1 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} \times$$

$$= \sqrt{\frac{45 + 18 \sqrt{5}}{5} + 10 + 2\sqrt{5} - 12} \sqrt{\frac{25 + 10 \sqrt{5} + 5\sqrt{5} + 10}{10}} \times \sqrt{= \sqrt{\frac{45 + 18 \sqrt{5} + 50 + 10 \sqrt{5}}{5}}}$$



 $-12\sqrt{\frac{35+15\sqrt{5}}{19}}, \quad 1-\sqrt{\frac{95+28\sqrt{5}}{5}}-10, \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}, \quad \ell=$

$$= \sqrt{\frac{95 + 38 \sqrt{5}}{5} - \frac{12}{\sqrt{2}}} \times \sqrt{7 + 3 \sqrt{5}} \times l = \sqrt{\frac{95 + 28 \sqrt{5}}{5} - \frac{12}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)} \times l = \sqrt{\frac{95 + 38 \sqrt{5}}{5} - \frac{12}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)} \times l = \sqrt{\frac{95 + 28 \sqrt{5}}{5} - \frac{12}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)} \times l = \sqrt{\frac{95 + 28 \sqrt{5}}{5} - \frac{12}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)} \times l = \sqrt{\frac{95 + 28 \sqrt{5}}{5} - \frac{12}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)} \times l = \sqrt{\frac{95 + 28 \sqrt{5}}{5} - \frac{12}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)} \times l = \sqrt{\frac{95 + 28 \sqrt{5}}{5} - \frac{12}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)} \times l = \sqrt{\frac{95 + 28 \sqrt{5}}{5} - \frac{12}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)} \times l = \sqrt{\frac{95 + 28 \sqrt{5}}{5} - \frac{12}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)} \times l = \sqrt{\frac{95 + 28 \sqrt{5}}{5} - \frac{12}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)} \times l = \sqrt{\frac{95 + 28 \sqrt{5}}{5} - \frac{12}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)} \times l = \sqrt{\frac{95 + 28 \sqrt{5}}{5} - \frac{12}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)} \times l = \sqrt{\frac{95 + 28 \sqrt{5}}{5} - \frac{12}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)} \times l = \sqrt{\frac{95 + 28 \sqrt{5}}{5} - \frac{12}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)} \times l = \sqrt{\frac{95 + 28 \sqrt{5}}{5} - \frac{12}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)} \times l = \sqrt{\frac{95 + 28 \sqrt{5}}{5} - \frac{12}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)} \times l = \sqrt{\frac{95 + 28 \sqrt{5}}{5} - \frac{12}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)} \times l = \sqrt{\frac{95 + 28 \sqrt{5}}{5} - \frac{12}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)} \times l = \sqrt{\frac{95 + 28 \sqrt{5}}{5} - \frac{12}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)} \times l = \sqrt{\frac{95 + 28 \sqrt{5}}{5} - \frac{12}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)} \times l = \sqrt{\frac{95 + 28 \sqrt{5}}{5} - \frac{12}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{95 + 28\sqrt{5}}{5}} - 12 \times \left(\sqrt{\frac{9}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}}\right) \times \ell = \sqrt{\frac{95 + 28\sqrt{5}}{5}} - 12 \times \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \times \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{95 + 28\sqrt{5}}{5} - 18 - 6\sqrt{5}} \times l = \sqrt{\frac{95 + 28\sqrt{5} - 90 - 30\sqrt{5}}{5}} \times l = \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}} \times l = \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{$$

= 0, 32 49 19 6... {

Fara el caso del dibujo, será: \$3 = 0.32 49 19 6 ... x 24,63 . 8:0 m m

Radio "13" de la circumferencia circumsonia al poligones que tiene por vértices los 26 al 35.

Licho radio es un exteto de un tricinquelo cuctarquelo de hipoternes a "a" o el otro exteto "f3" (ver lam. 38), de valores ya calculados.

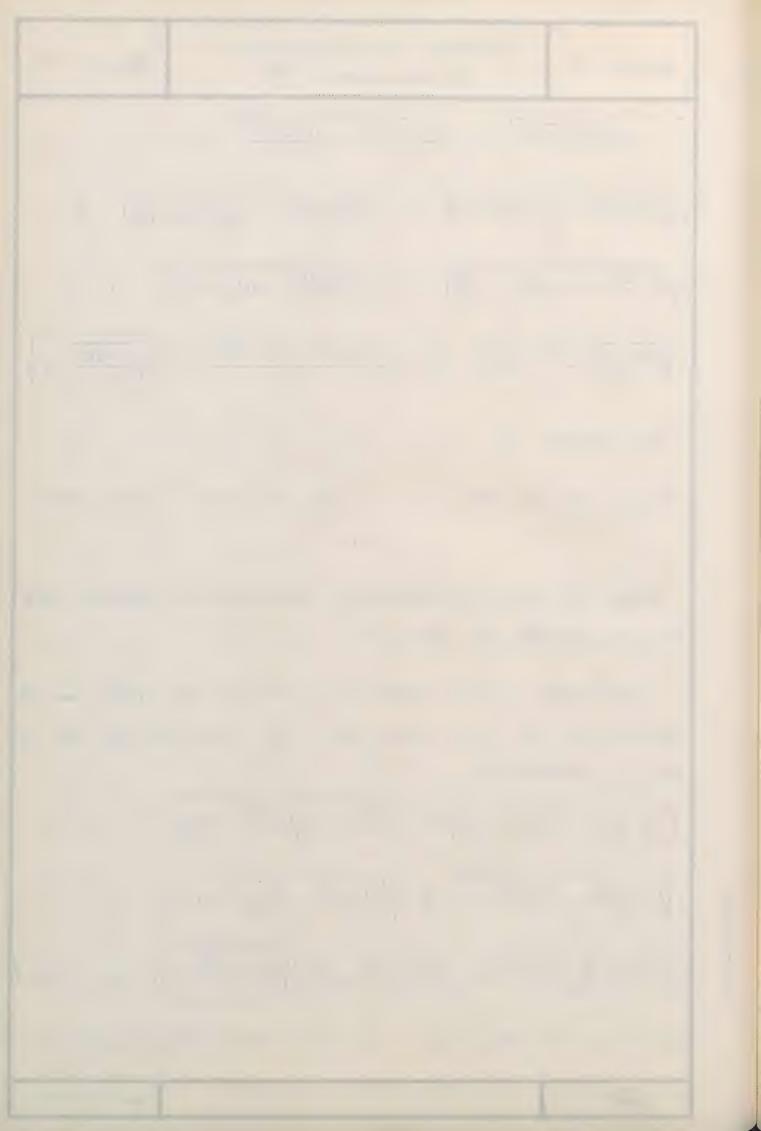
$$r_3 = \sqrt{a^2 - \left(\frac{f_3}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{11 + 4\sqrt{5}}}{2}\ell\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}}\ell : 2\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{11+4\sqrt{5}}{4}} = \frac{5-2\sqrt{5}}{5}: 4 \times \ell = \sqrt{\frac{11+4\sqrt{5}}{4}} = \frac{5-2\sqrt{5}}{20} = \ell$$

$$= \sqrt{\frac{55 + 20 \sqrt{5} - 5 + 2 \sqrt{5}}{20}} \quad \ell = \sqrt{\frac{50 + 22 \sqrt{5}}{20}} \times \ell \cdot \sqrt{\frac{25 + 11 \sqrt{5}}{10}} \quad \ell = 2.22 \ 70 \ 32 \ 73.\ell$$

Jana el 1800 del dilujo, sera: 13 = 2.22 70 32 72... 24,63 = 54,9 mm.

CES-



En la properción. Il de la virtices 26 al 35 se punde considerar que practicamente estain rebre la projección de la esfera circunscrita al arquimediano. La diferencia de radios, en el ejemplo de la lamina es tan rolo de 0,1 mm.

En el cuadro simóptico que damos a continuación, resuminur. Los resultados de los valores complementares de ducidos.

CUADRO SINOPTICO DE LAS MAGNITUDES COMPLEMENTARIAS

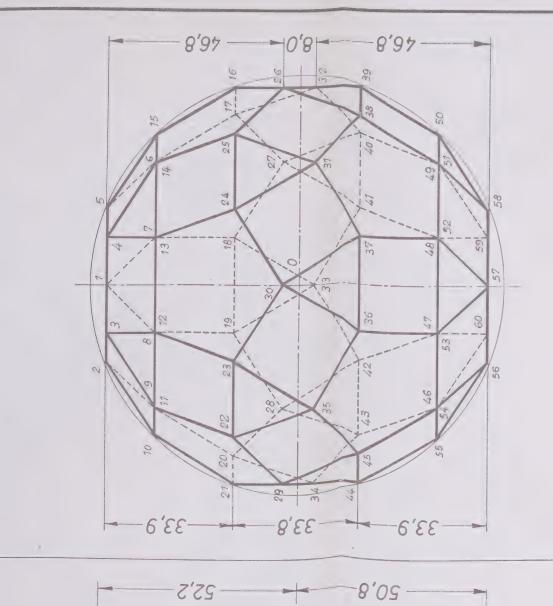
u '1 /	1/ 1	
Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
n	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ ℓ	0, 86 60 25 l
k	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} \ell$	0. 68 81 91
f ₁	V5 +2V5 l	3. 07 76 84l
f_2	V 5 + 2 1/5 &	1, 37 63 82!
f3	√ 5-2√5 5 ℓ	0, 32 49 20 6
91	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$ 2	0, 52 57 31 l
g_z	V 5 + 2 V5 &	1, 37 63 82l
93	V 5+ V5 &	1. 90 21 14 2
Г1	$\frac{\sqrt{5+1}}{2}$ ℓ	1. 61 80 34 l
F2	V 25 + 9 V5	2, 12 42 55 l
<i>「</i> 3	V=5 + 11 V5	e, 22 70 33 l
	$f_2 = g_2 = 2k = \frac{2C_5}{3}$ (sela	ciones motables)





Z+

-54,6-



ARQUIMEDIANO VI

\ +

0

*

- 15'71

20	30	12	9	120	00
- 63	11	11	13	п Д	+
	5	C	>	V	2 12
					+.
					4
Número de caras triangulares	de caras cuadradas	Número de caras pentagonales	vertices	aristas	Número de caras de un ángulo sólido: 1P+2R+1Ps
de	de	de	de	de	de
Número	Número	Número	Número de vértices	Número de aristas	Número

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el Arquimediano VI, en el que en cada vértice concurren un triángulo equilátero, dos cuadrados y un pentágono.

La longitud de su lado es de 24,6 milímetros, y las coordenadas de su centro 0, son: 0 (72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

1+

[∞]
2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
22 22 23
55,0
9,72
25 E
S ₅

IA C		CUTSO		Fections
Arquimediano VI		(firma)		
<i>iime</i>			cación	Califi-
Argu				Entregada
				Propuesta De entrega Entregada
				Propuesta
1:1	Escala	Alumno:	Fecha:	

Lámina 38

- 19

Curso 19

